

DOI: 10.19951/j.cnki.1672-9331.20220524001

文章编号: 1672-9331(2024)02-0084-08

引用格式: 李旭宇, 吴献智. 串联六轴机械臂逆运动学几何解法[J]. 长沙理工大学学报(自然科学版), 2024, 21(2): 84-91.

Citation: LI Xuyu, WU Xianzhi. Inverse kinematics of geometric algorithm of series six-axis manipulator[J]. J Changsha Univ Sci Tech (Nat Sci), 2024, 21(2): 84-91.

# 串联六轴机械臂逆运动学几何解法

李旭宇, 吴献智

(长沙理工大学 汽车与机械工程学院, 湖南 长沙 410114)

**摘要:**【目的】提高机械臂运动轨迹的控制精度和快速响应性能。【方法】采用特征点改进串联六轴机械臂运动学逆解的几何算法。【结果】机械臂末端位姿通过三个特征点表示, 将前5个关节划分为关节1、关节2和关节3、关节4和关节5三组。前5个关节的角度由两个特征点确定, 每组可得出两种连杆姿态, 进而组合成前5节连杆的8种姿态, 再根据前5节连杆的姿态和另一个特征点确定关节6的角度。通过与目标末端位姿进行对比, 逆解计算出的转角值所确定的末端位姿无论理论上的误差, 并且与目标位姿一致。【结论】改进的串联六轴机械臂几何逆解算法计算过程简单且正确可行。

**关键词:** 六轴机械臂; 运动学逆解; 几何算法; 位姿分析; 轨迹控制

中图分类号: TP241.3

文献标志码: A

## Inverse kinematics of geometric algorithm of series six-axis manipulator

LI Xuyu, WU Xianzhi

(College of Automotive and Mechanical Engineering, Changsha University of Science & Technology, Changsha 410114, China)

**Abstract:** [Purposes] In order to improve the control accuracy and fast response property of manipulator path. [Methods] Feature points are used to improve the geometric algorithm of inverse kinematics solution of serial six-axis manipulator. [Findings] The end pose of the manipulator could be represented by three feature points, and the first five joints are divided into three groups: joint 1, joint 2 and joint 3, joint 4 and joint 5. The angles of the first five joints are determined by two feature points. And two link poses could be gotten from each group, which could be combined into eight poses of the first five links. Then the solution of joint 6 is determined according to the pose of the first five links and another feature point. Comparing with the target terminal pose, the terminal pose determined by the angle value is calculated by the inverse solution had no theoretical error, which is consistent with the target terminal pose. [Conclusions] The improved geometric inverse solution algorithm of serial six-axis manipulator is simple, correct and feasible.

**Key words:** six-axis manipulator; inverse kinematics; geometric algorithm; pose analysis; path control

**Foundation item:** Project (51805047) supported by the National Natural Science Foundation of China Youth

**Corresponding author:** LI Xuyu (1967—) (ORCID: 0000-0003-0317-1617), male, associate professor, research interest: mechanical and electrical system design research. E-mail: lxy519@163.com

收稿日期: 2022-05-24; 修回日期: 2022-07-04; 接受日期: 2022-07-05

基金项目: 国家自然科学基金青年项目(51805047)

通信作者: 李旭宇(1967—)(ORCID: 0000-0003-0317-1617), 男, 副教授, 主要从事机电系统设计方面的研究。

E-mail: lxy519@163.com。

## 0 引言

近年来,随着工业智能化的发展,机器人在工业上的使用数量逐年增加,被广泛用于加工、焊接、装配、运输和喷涂等领域。在机器人技术的发展过程中,对机器人性能的要求也越来越高,特别是在某些特殊的应用场合,要求极高的轨迹精度。逆运动学在机器人学中占有非常重要的地位,是机器人技术的基础,影响着机器人轨迹控制的快速性与准确性<sup>[1]</sup>。因此,对逆解算法的研究有很重要的现实意义。

逆运动学的求解须先建立运动学模型,当前研究主要采用D-H参数法和旋量法<sup>[2-5]</sup>建立模型。当前逆运动学主要求解方法有封闭解法(解析解)、数值解法(迭代解)和智能算法等。封闭解法分为代数法和几何法<sup>[1,6]</sup>。数值解法<sup>[7]</sup>是通过迭代方式进行逆解计算,计算精度高,需要注意的是,迭代法是在局部范围内求解,需要给定一组初始值,而初始值的大小会影响最终结果,迭代过程会增加计算时间。智能算法如遗传算法<sup>[8]</sup>、粒子群算法<sup>[9-12]</sup>和神经网络等均存在计算量大、局部收敛和涉及大量参数选择等问题,其中反向传播(back propagation, BP)神经网络、径向基函数(radial basis function, RBF)神经网络等算法<sup>[13-16]</sup>的计算精度高、预测性能好,但是计算时间长,不利于算法的快速性提升。基于旋量理论的运动学逆解<sup>[17-19]</sup>求解算法相对简单且计算精度高,但在确定最优解时需要对计算结果进行筛选,并且最终解不能很好地明确实际机械臂姿态。代数法同样需要对计算出的解进行判断,然后筛选出符合要求的解<sup>[20-21]</sup>。

几何算法<sup>[22-23]</sup>是根据机械臂的姿态求解运动学逆解,其计算结果的几何意义明确,计算速度快,计算结果唯一。目前,几何算法对关节解的判定方法较为复杂,本文用三个特征点确定机械臂末端位姿,并对目标末端位姿下机械臂的姿态进行分析,明确关节间解的关系,简化计算过程。

## 1 模型及坐标系的建立

六轴串联机械臂模型如图1(a)所示。该模型由6个旋转关节和6根连杆组成,其中关节4~6的轴线交于一点。为了计算方便将机械臂模型进行简化,如图1(b)所示。为方便描述,用 $\theta_i$ 表示关节 $i$ 的旋转角度, $L_i$ 表示连杆 $i$ 的长度, $\{n\}$ 表示坐标系, $O_n$ 表示坐标系 $\{n\}$ 的原点, $x_n, y_n, z_n$ 表示坐标系 $\{n\}$ 的三个坐标轴, ${}^n P$ 表示点 $P$ 在坐标系 $\{n\}$ 中的坐标, ${}^n x_p, {}^n y_p, {}^n z_p$ 表示点 $P$ 在坐标系 $\{n\}$ 中的三个坐标分量, $Q_1, Q_2, Q_3$ 表示确定末端位姿的三个特征点。

根据机械臂模型建立的坐标系如图1(b)所示。 $\{1\} \sim \{6\}$ 为连杆坐标系,以连杆 $i$ 的轴线与关节 $i$ 的轴线交点为坐标系 $\{i\}$ 的原点 $O_i$ , $z_i$ 轴与连杆 $i$ 的轴线重合,指向下一个关节。 $\{0\}$ 为基坐标系,原点 $O_0$ 在底部平台上端面的几何中心, $z_0$ 轴的方向与 $z_1$ 轴一致。 $\{m\}$ 为末端坐标系, $O_m$ 为机械臂的末端点, $z_m$ 轴方向与 $z_6$ 轴方向一致。以图1所示机械臂姿态为初始姿态,此时 $\theta_1 \sim \theta_6$ 的值均为0。

此外,关节1、4、6分别绕坐标系 $\{1\}$ 、 $\{4\}$ 、 $\{6\}$ 的 $z$ 轴旋转,关节2、3、5分别绕坐标系 $\{2\}$ 、 $\{3\}$ 、 $\{5\}$ 的 $x$ 轴旋转。令旋转轴的正方向垂直纸面向外,逆时针旋转时角度值为“+”,顺时针旋转时角度值为“-”。

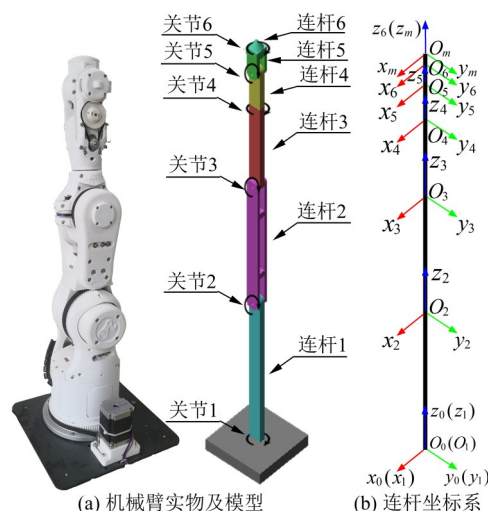


图1 机械臂模型及连杆坐标系

Fig. 1 Mechanical arm model and link coordinate system

## 2 运动学求解

### 2.1 正运动学求解

正运动学是通过给定各关节的角度  $\theta_i$ , 求末端坐标系  $\{m\}$  (即末端位姿) 相对于基坐标系  $\{0\}$  的齐次变换矩阵  ${}^0T_m$ 。

$${}^0T_m = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 \cdot {}^3T_4 \cdot {}^4T_5 \cdot {}^5T_6 \cdot {}^6T_m \quad (1)$$

式中:  ${}^0T_1$  为坐标系  $\{1\}$  相对于坐标系  $\{0\}$  的齐次变换矩阵,  ${}^1T_2, {}^2T_3, {}^3T_4, {}^4T_5, {}^5T_6, {}^6T_m$  依次类推。

### 2.2 逆运动学求解

逆运动学是通过给定目标末端位姿, 求解机械臂由初始姿态运动到目标末端位姿时各关节转动的角度  $\theta_i$ 。目标末端位姿下机械臂的某一姿态如图2所示。假定末端坐标系  $\{m\}$  的原点  $O_m$  与  $Q_1$  重合,  $z_m$  轴方向由  $Q_2$  确定,  $x_m$  轴方向由  $Q_3$  确定,  $Q_1, Q_2, Q_3$  不共线。运动学逆解以此机械臂姿态为基础进行求解。

$Q_1, Q_2$  和  $Q_3$  相对于坐标系  $\{0\}$  的坐标如下:

$${}^0Q_1 = ({}^0x_{Q_1}, {}^0y_{Q_1}, {}^0z_{Q_1})$$

$${}^0Q_2 = ({}^0x_{Q_2}, {}^0y_{Q_2}, {}^0z_{Q_2})$$

$${}^0Q_3 = ({}^0x_{Q_3}, {}^0y_{Q_3}, {}^0z_{Q_3})$$

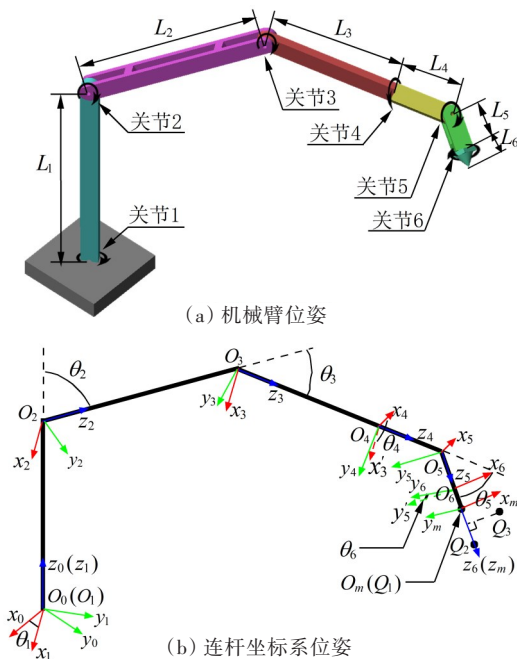


图2 目标位姿下机械臂的姿态

Fig. 2 Mechanical arm pose under the target attitude

各关节角度的转动范围是从图1所示的机械臂初始姿态运动到图2所示的机械臂姿态时关节转动的范围。在图2(b)中,  $\theta_1$  是  $x_0$  与  $x_1$  所形成的夹角, 坐标系  $\{1\}$  相当于由坐标系  $\{0\}$  绕  $z_0$  旋转  $\theta_1$  得到;  $\theta_2$  是连杆1的延长线与  $z_2$  形成的夹角, 坐标系  $\{2\}$  相当于由坐标系  $\{1\}$  绕  $x_1$  旋转  $\theta_2$ , 再沿  $z_1$  平移  $L_1$  得到;  $\theta_3$  是连杆2的延长线与  $z_3$  形成的夹角, 坐标系  $\{3\}$  相当于由坐标系  $\{2\}$  绕  $x_2$  旋转  $\theta_3$ , 再沿  $z_2$  平移  $L_2$  得到;  $\theta_4$  是  $x'_3$  与  $x_4$  所形成的夹角,  $x'_3$  是由  $x_3$  沿  $z_3$  平移至  $O_4$  得到, 坐标系  $\{4\}$  相当于由坐标系  $\{3\}$  绕  $z_3$  旋转  $\theta_4$ , 再沿  $z_3$  平移  $L_3$  得到;  $\theta_5$  是连杆4的延长线与  $z_5$  形成的夹角, 坐标系  $\{5\}$  相当于由坐标系  $\{4\}$  绕  $x_4$  旋转  $\theta_5$ , 再沿  $z_4$  平移  $L_4$  得到;  $\theta_6$  是  $y'_5$  与  $y_6$  所形成的夹角,  $y'_5$  是由  $y_5$  沿  $z_5$  平移至  $O_6$  得到, 坐标系  $\{6\}$  相当于由坐标系  $\{5\}$  绕  $z_5$  旋转  $\theta_6$ , 再沿  $z_5$  平移  $L_5$  得到; 坐标系  $\{m\}$  相当于由坐标系  $\{6\}$  沿  $z_6$  平移  $L_6$  得到。

#### 2.2.1 关节1的解

以图2(b)中基坐标系  $\{0\}$  为基础求解  $\theta_1$ 。如图3所示, 连杆3和连杆4构成一条空间线段, 长度为  $L_3 + L_4$ ; 同样, 连杆5和连杆6构成一条空间线段, 长度为  $L_5 + L_6$ 。连杆1~4在  $x_0O_0y_0$  平面的投影是直线段  $O_0O'_5$ 。  $O'_5$  为  $O_5$  在  $x_0O_0y_0$  平面的投影。  $O_0O'_5$  为图2(b)中的  $y_1$ ,  $O_0O'_5$  与  $O_0y_0$  的夹角为  $\theta_1$ 。

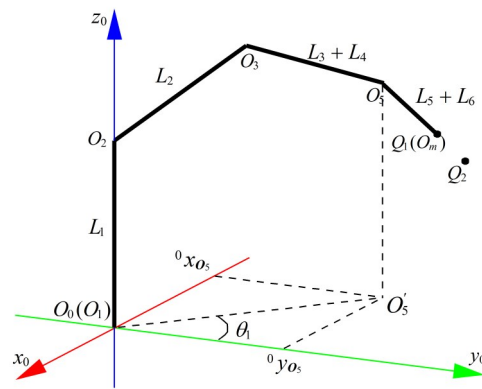


图3  $\theta_1$  示意图

Fig. 3 Schematic diagram of  $\theta_1$

已知  $Q_1$  和  $Q_2$  相对于坐标系  $\{0\}$  的坐标, 通过矢量法可求得  $O_5$  相对于坐标系  $\{0\}$  的坐标, 即

$${}^0O_5 = ({}^0x_{O_5}, {}^0y_{O_5}, {}^0z_{O_5})$$

$\theta_1$  的计算如下:

$${}^0O_5 = \overrightarrow{Q_2Q_1}(L_5 + L_6) + Q_1 \quad (2)$$

$$\overrightarrow{Q_2Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{|Q_1 - Q_2|} \quad (3)$$

$$\theta_1 = \text{atan2}(-{}^0x_{O_5}, {}^0y_{O_5}) \quad (4)$$

式(2)~(4)中:  $\overrightarrow{Q_2Q_1}$  为  $Q_2$  指向  $Q_1$  的单位向量;  $|Q_1 - Q_2|$  为  $Q_1$  与  $Q_2$  间的距离;  $\text{atan2}$  为用于计算反正切值的函数。

在关节1的角度取值与式(4)的解相差  $180^\circ$  的情况下,末端位姿也能与目标末端位姿保持一致,如图4(b)所示。此时关节1的角度值有另一解  $\theta'_1$ ,  $\theta'_1$  的计算式如式(5)所示:

$$\theta'_1 = \text{atan2}({}^0x_{O_5}, -{}^0y_{O_5}) \quad (5)$$

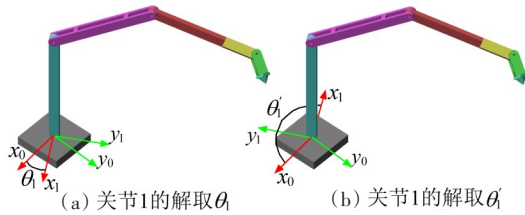


图4 关节1不同解下机械臂状态

Fig. 4 Mechanical arm pose under different solution of joint 1

### 2.2.2 关节2和3的解

在任意位姿下连杆1~3形成一个平面。将坐标系  $\{1\}$  沿  $z_1$  轴平移  $L_1$  得到坐标系  $\{1'\}$ , 坐标系  $\{1'\}$  的原点  $O_{1'}$  与  $O_2$  重合,  $x_{1'}$  与  $x_2$  重合。以  $\{1'\}$  的  $z_{1'}$  平面 (即连杆1~3所在的平面, 如图5所示) 为基础求解  $\theta_2$  和  $\theta_3$ , 可将  $\theta_2$  和  $\theta_3$  的求解由空间转换到平面。  $O_5$  相对于  $\{1'\}$  的坐标如下:

$${}^{1'}O_5 = ({}^{1'}x_{O_5}, {}^{1'}y_{O_5}, {}^{1'}z_{O_5})$$

$z_{1'}$  轴相当于图2(b)中连杆1的延长线,  $O_2O_3$  的延长线相当于图2(b)中连杆2的延长线, 如图5所示。图5中  $\angle z_{1'}O_2O_3$  是关节2的解  $\theta_2$ ,  $O_2O_3$  的延长线与  $O_3O_5$  的夹角是关节3的解  $\theta_3$ 。

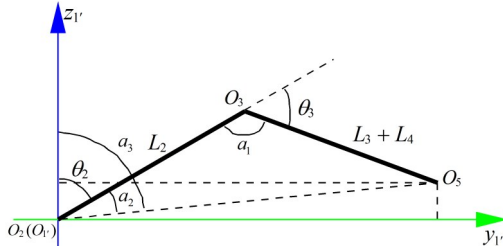


图5  $\theta_2$  和  $\theta_3$  示意图

Fig. 5 Schematic diagram of  $\theta_2$  and  $\theta_3$

$${}^{1'}O_5 = \left(1, \sqrt{{}^0x_{O_5}^2 + {}^0y_{O_5}^2}, {}^0z_{O_5}^2 - L_1\right) \quad (6)$$

$$a_1 = \arccos \frac{L_1^2 + (L_3 + L_4)^2 - ({}^{1'}y_{O_5}^2 + {}^{1'}z_{O_5}^2)}{2L_2(L_3 + L_4)} \quad (7)$$

$$a_2 = \arccos \frac{L_2^2 + {}^{1'}y_{O_5}^2 + {}^{1'}z_{O_5}^2 - (L_3 + L_4)^2}{2L_2\sqrt{{}^{1'}y_{O_5}^2 + {}^{1'}z_{O_5}^2}} \quad (8)$$

$$a_3 = \text{atan2}(-{}^{1'}y_{O_5}, {}^{1'}z_{O_5}) \quad (9)$$

式(6)~(9)中:  ${}^{1'}O_5$  是  $O_5$  相对于  $\{1'\}$  的坐标;  ${}^{1'}x_{O_5}$ 、 ${}^{1'}y_{O_5}$ 、 ${}^{1'}z_{O_5}$  表示  $O_5$  在坐标系  $\{1'\}$  中的三个坐标分量。

考虑到余弦定理求得  $a_1$  和  $a_2$  的取值范围是  $[0, \pi]$ ,  $a_3$  的取值范围是  $(-\pi, \pi]$ , 以及确定关节角度值的“ $\pm$ ”。  $\theta_2$  和  $\theta_3$  的计算式如式(10)所示:

$$\begin{cases} \theta_3 = a_1 - \pi \\ \theta_2 = a_3 + a_2 \end{cases} \quad (10)$$

在关节3的角度取值与式(10)中  $\theta_3$  相反 (即取  $-\theta_3$ ) 的情况下, 机械臂末端也能运动到目标末端位姿, 如图6(b)所示, 此时关节2的角度值有另一解  $\theta'_2$ ,  $\theta'_2$  和  $\theta'_3$  的计算式如式(11)所示:

$$\begin{cases} \theta'_3 = \pi - a_1 \\ \theta'_2 = a_3 - a_2 \end{cases} \quad (11)$$

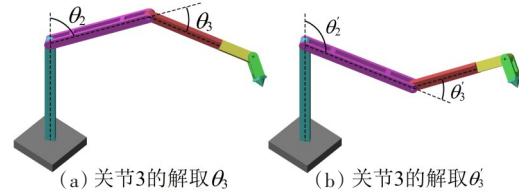


图6 关节3不同解下机械臂状态

Fig. 6 Mechanical arm pose under different solution of joint 3

关节1的解取不同值时, 关节2和关节3的解是不一样的。在关节1取  $\theta_1$  时采用式(6)~(11)计算关节2和关节3的角度。当关节1取  $\theta'_1$  时, 式(10)中的计算式应改为式(12), 如下所示:

$$\begin{cases} \theta_3 = \pi - a_1 \\ \theta_2 = -(a_3 + a_2) \end{cases} \quad (12)$$

式(11)中的计算式应改为式(13), 如下所示:

$$\begin{cases} \theta'_3 = a_1 - \pi \\ \theta'_2 = a_2 - a_3 \end{cases} \quad (13)$$

### 2.2.3 关节4和5的解

将图2(b)中坐标系  $\{3\}$  沿  $z_3$  轴平移  $L_3 + L_4$  得到坐标系  $\{3'\}$ , 坐标系  $\{3'\}$  的原点  $O'_3$  与  $O_5$  重合。以坐标系  $\{3'\}$  为基础求关节4和关节5的解。将  $Q_1$  分别在  $x_3O_3y_3$  和  $z_3O_3y_3$  平面投影, 在  $x_3O_3y_3$  平



面的投影点为  $Q'_1$ ,  $\angle y_3 O_3 Q'_1$  即为关节 4 的解  $\theta_4$ ,  $\angle z_3 O_3 Q_1$  即为关节 5 的解  $\theta_5$ , 如图 7 所示。考虑到关节 1、2、3 的解取不同值时的影响, 求关节 4 和关节 5 角度时, 用齐次变换矩阵  ${}^0T = {}^1T \cdot {}^2T \cdot {}^3T$  的逆求解  $Q_1$  相对于坐标系  $\{3'\}$  的坐标值。  $\theta_4$  的计算过程如下:

$$({}^3Q_1 \ 1)^T = ({}^0T \cdot {}^1T \cdot {}^2T \cdot {}^3T)^{-1} (Q_1 \ 1)^T \quad (14)$$

$$\theta_4 = \text{atan2}(-{}^3x_{Q_1}, {}^3y_{Q_1}) \quad (15)$$

式中:  ${}^3Q_1$  为  $Q_1$  相对于  $\{3'\}$  的坐标;  ${}^3x_{Q_1}$ 、 ${}^3y_{Q_1}$  分别为  $Q_1$  在坐标系  $\{3'\}$  中  $x$  轴和  $y$  轴上的分量。

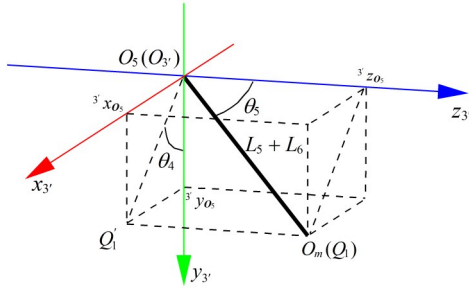


图 7  $\theta_4$  和  $\theta_5$  示意图

Fig. 7 Schematic diagram of  $\theta_4$  and  $\theta_5$

关节 4 的角度与式 (15) 计算的角度在相差  $180^\circ$  的情况下, 机械臂末端也可以运动到目标末端位姿, 如图 8(b) 所示, 此时关节 4 有另一解  $\theta'_4$ , 如式 (16) 所示:

$$\theta'_4 = \text{atan2}({}^3x_{Q_1}, -{}^3y_{Q_1}) \quad (16)$$

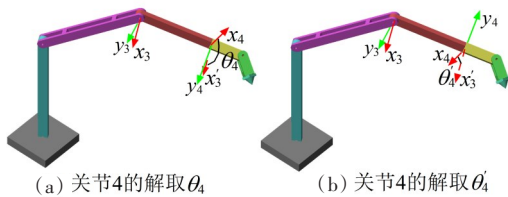


图 8 关节 4 不同解下机械臂状态

Fig. 8 Mechanical arm pose under different solution of joint 4

如图 7 所示, 若通过余弦定理或反余弦函数求关节 5 的解, 取得的值为正值 (余弦定理取值范围是  $[0, \pi]$ )。关节 4 的解取不同值时, 关节 5 的解会出现“ $\pm$ ”不同的情况, 故通过余弦定理或反余弦函数求关节 5 的解时, 应根据关节 4 的解来判断关节 5 解的方向 (“ $\pm$ ”)。

当关节 4 的角度为  $\theta_4$  时, 关节 5 的角度  $\theta_5$  的计算式如式 (17) 所示:

$$\theta_5 = -\arccos \frac{{}^3z_{Q_1}}{L_5 + L_6} \quad (17)$$

当关节 4 的角度为  $\theta'_4$  时, 关节 5 的角度  $\theta'_5$  的计算如式 (18) 所示:

$$\theta'_5 = \arccos \frac{{}^3z_{Q_1}}{L_5 + L_6} \quad (18)$$

#### 2.2.4 关节 6 的解

如图 2(b) 所示, 当机械臂末端位姿与目标末端位姿一致时,  $Q_3$  到  $z_m$  轴的垂线与  $x_m$  轴平行。给定  $Q_3$  相对于基坐标系  $\{0\}$  的坐标值, 关节 6 的解  $\theta_6$  的计算式如下:

$$({}^0Q_3 \ 1)^T = {}^5T^{-1} ({}^5Q_3 \ 1)^T \quad (19)$$

$$\theta_6 = \text{atan2}({}^5y_{Q_3}, {}^5x_{Q_3}) \quad (20)$$

式 (19)~(20) 中:  ${}^5Q_3$  为  $Q_3$  相对于  $\{5\}$  的坐标;  ${}^5x_{Q_3}$ 、 ${}^5y_{Q_3}$  分别为  $Q_3$  在坐标系  $\{5\}$  中  $x$  轴、 $y$  轴上的分量。

综上可知, 机械臂末端位姿与目标末端位姿一致时, 关节 1 有两个解, 关节 2 和关节 3 有两组解, 关节 4 和关节 5 有两组解, 组合可得到 8 组解。根据前 5 个关节的解计算得到关节 6 的解。目标末端位姿下机械臂各关节解的确定步骤如下: 首先确定关节 1 的解 (两个解任选其一), 接着确定关节 2 和关节 3 的解 (两组解任选其一), 然后确定关节 4 和 5 的解 (两组解任选其一), 最后计算关节 6 的解, 从而得到机械臂的 8 组运动学逆解, 如表 1 所示。

表 1 各关节解的组合

Table 1 Combination of solution of joints

组合编号	关节 1	关节 2	关节 3	关节 4	关节 5	关节 6
1	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$
2	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta'_4$	$\theta'_5$	$\theta_6$
3	$\theta_1$	$\theta'_2$	$\theta'_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$
4	$\theta_1$	$\theta'_2$	$\theta'_3$	$\theta'_4$	$\theta'_5$	$\theta_6$
5	$\theta'_1$	$-\theta_2$	$-\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$
6	$\theta'_1$	$-\theta_2$	$-\theta_3$	$\theta'_4$	$\theta'_5$	$\theta_6$
7	$\theta'_1$	$-\theta'_2$	$-\theta'_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$
8	$\theta'_1$	$-\theta'_2$	$-\theta'_3$	$\theta'_4$	$\theta'_5$	$\theta_6$

### 3 验证结果

验证方法一般有两种, 一是给定末端位姿矩阵, 通过逆解算法计算出关节角度的解, 再根据关节角度计算出末端位姿矩阵, 将末端位姿矩阵的

计算值与给定值进行对比;二是给定一组关节角度值,通过正运动学计算出末端位姿矩阵,再根据此位姿矩阵按逆解算法计算出关节角度的解,将关节角度的计算值与给定值对比。

本研究给定三个特征点相对于基坐标系 $\{0\}$ 的坐标值,验证方法是将三个特征点坐标的给定值与计算值在末端坐标系 $\{m\}$ 下进行对比。用 ${}^mQ_1^{(1)}$ 、 ${}^mQ_2^{(1)}$ 、 ${}^mQ_3^{(1)}$ 表示三个特征点的给定值在坐标系 $\{m\}$ 下的坐标,用 ${}^mQ_1^{(2)}$ 、 ${}^mQ_2^{(2)}$ 、 ${}^mQ_3^{(2)}$ 表示三个特征点的计算值在坐标系 $\{m\}$ 下的坐标。

给定 ${}^0Q_1$ 、 ${}^0Q_2$ 、 ${}^0Q_3$ ,根据 $Q_1$ 、 $Q_2$ 、 $Q_3$ 与末端坐标系 $\{m\}$ 的几何关系,计算 $Q_1$ 、 $Q_2$ 、 $Q_3$ 相对于末端坐标系 $\{m\}$ 的坐标 ${}^mQ_1^{(1)}$ 、 ${}^mQ_2^{(1)}$ 、 ${}^mQ_3^{(1)}$ 。通过式(2)~(20)计算关节1~5的解,再用式(1)求得齐次变换矩阵 ${}^0_mT$ 。根据 ${}^0_mT$ 与 ${}^0Q_1$ 、 ${}^0Q_2$ 、 ${}^0Q_3$ 计算 $Q_1$ 、 $Q_2$ 、 $Q_3$ 相对于末端坐标系 $\{m\}$ 的坐标 ${}^mQ_1^{(2)}$ 、 ${}^mQ_2^{(2)}$ 、 ${}^mQ_3^{(2)}$ 。将 ${}^mQ_1^{(1)}$ 、 ${}^mQ_2^{(1)}$ 、 ${}^mQ_3^{(1)}$ 分别与 ${}^mQ_1^{(2)}$ 、 ${}^mQ_2^{(2)}$ 、 ${}^mQ_3^{(2)}$ 进行对比,若均一致则说明计算过程无误。

验证时给定参数值如下:

$L_1=254.0$ ,  $L_2=225.0$ ,  $L_3=150.0$ ,  $L_4=67.3$ ,  $L_5=40.0$ ,  $L_6=20.0$ ,

$${}^0Q_1 = (100, 80, 150)$$

$${}^0Q_2 = (185, 150, 100)$$

$${}^0Q_3 = (160, 90, 130)$$

当末端坐标系 $\{m\}$ 与目标位姿一致时, $Q_1$ 与末端坐标系 $\{m\}$ 原点 $O_m$ 重合; $Q_2$ 在 $z_m$ 轴的正半轴上; $Q_3$ 在 $z_m$ 轴上的垂足与 $Q_3$ 的连线同 $x_m$ 轴的正半轴平行。通过几何关系计算 ${}^mQ_1^{(1)}$ 、 ${}^mQ_2^{(1)}$ 、 ${}^mQ_3^{(1)}$ ,如下所示:

$${}^mQ_1^{(1)} = (0, 0, 0)$$

$${}^mQ_2^{(1)} = (0, 0, 120.93)$$

$${}^mQ_3^{(1)} = (30.63, 0, 56.22)$$

选取式(4)、式(10)、式(15)、式(16)、式(20)的计算值为关节1~关节6的一组解,求解齐次变换矩阵 ${}^0_mT$ ,计算出 ${}^0_mT$ 的逆矩阵,得到 ${}^mQ_1^{(2)}$ 、 ${}^mQ_2^{(2)}$ 、 ${}^mQ_3^{(2)}$ 的解。

$$\begin{pmatrix} {}^mQ_1^{(2)} & 1 \end{pmatrix}^T = {}^0_mT^{-1} \begin{pmatrix} Q_1 & 1 \end{pmatrix}^T \quad (21)$$

$$\begin{pmatrix} {}^mQ_2^{(2)} & 1 \end{pmatrix}^T = {}^0_mT^{-1} \begin{pmatrix} Q_2 & 1 \end{pmatrix}^T \quad (22)$$

$$\begin{pmatrix} {}^mQ_3^{(2)} & 1 \end{pmatrix}^T = {}^0_mT^{-1} \begin{pmatrix} Q_3 & 1 \end{pmatrix}^T \quad (23)$$

式(21)~(23)的计算结果如下:

$${}^mQ_1^{(2)} = (0, 0, 0)$$

$${}^mQ_2^{(2)} = (0, 0, 120.93)$$

$${}^mQ_3^{(2)} = (30.63, 0, 56.22)$$

对比结果如下:

$${}^mQ_1^{(1)} - {}^mQ_1^{(2)} = (0, 0, 0)$$

$${}^mQ_2^{(1)} - {}^mQ_2^{(2)} = (0, 0, 0)$$

$${}^mQ_3^{(1)} - {}^mQ_3^{(2)} = (0, 0, 0)$$

用上述验证方法,分别对表1中的8组解进行验证。分析对比结果可知,逆解算法所确定的机械臂末端位姿与目标末端位姿是一致的。

## 4 结论

本研究对末端目标位姿下的机械臂姿态进行分析,以连杆间姿态的相互关系为基础,引入特征点对串联六轴机械臂运动学问题进行求解,然后对比计算得出的末端位姿与目标末端位姿,验证该算法的准确性和有效性。

在逆解算法中用三个特征点表示末端位姿,使末端姿态的描述更加简单,将之与连杆姿态相结合,有效地简化了计算过程。对机械臂连杆进行划分,确定每个解与连杆姿态的关系,使解的几何意义更加明确。

逆解算法具有结果唯一、计算精度高的特点,符合机械臂轨迹控制要求。在应用该算法规划机械臂轨迹时可以极大地减少计算时间,提高运算效率,在实时轨迹控制中有较高的应用价值。

## [参考文献]

- [1] 蔡自兴,谢斌. 机器人学[M]. 3版. 北京: 清华大学出版社, 2015: 44-48.  
CAI Zixing, XIE Bin. Robotics [M]. 3rd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2015: 44-48.
- [2] 张华文. 六自由度串联机器人运动学逆解算法研究[J]. 国外电子测量技术, 2021, 40(4): 53-57. DOI: 10.19652/j.cnki.femt.2002493.  
ZHANG Huawen. Research on inverse kinematics of 6-DOF series robot [J]. Foreign Electronic Measurement Technology, 2021, 40(4): 53-57. DOI: 10.19652/j.cnki.femt.2002493.
- [3] 刘广瑞, 孟少飞, 王钊, 等. 6R模块化机器人逆解算法与误差分析[J]. 机械设计与制造, 2022(7): 295-300. DOI: 10.19356/j.cnki.1001-3997.20211111.011.  
LIU Guangrui, MENG Shaofei, WANG Zhao, et al.

- Solution of inverse kinematics and error analysis for 6R modular robot [J]. *Machinery Design & Manufacture*, 2022 (7): 295-300. DOI: 10.19356/j.cnki.1001-3997.20211111.011.
- [4] 李宪华, 吕磊, 张雷刚, 等. 基于旋量理论的六自由度机械臂逆解算法[J]. *制造技术与机床*, 2020(8): 68-72. DOI: 10.19287/j.cnki.1005-2402.2020.08.013. LI Xianhua, LYU Lei, ZHANG Leigang, et al. Inverse kinematic solution algorithm of 6-DOF manipulator based on screw theory [J]. *Manufacturing Technology & Machine Tool*, 2020 (8): 68-72. DOI: 10.19287/j.cnki.1005-2402.2020.08.013.
- [5] 吴亮, 李宪华. 基于旋量和自运动的七自由度机械臂逆解算法[J]. *南阳理工学院学报*, 2021, 13(6): 84-89. DOI: 10.16827/j.cnki.41-1404/z.2021.06.015. WU Liang, LI Xianhua. Inverse solution algorithm of 7-DOF manipulator based on screw and self motion [J]. *Journal of Nanyang Institute of Technology*, 2021, 13(6): 84-89. DOI: 10.16827/j.cnki.41-1404/z.2021.06.015.
- [6] 赵荣波, 施智平, 关永, 等. 基于旋量理论和代数消元 6R 机器人逆解算法[J]. *传感器与微系统*, 2018, 37(12): 114-117, 121. DOI: 10.13873/J.1000-9787(2018)12-0114-04. ZHAO Rongbo, SHI Zhiping, GUAN Yong, et al. Inverse kinematic solution algorithm of 6R robots based on screw theory and algebraic elimination [J]. *Transducer and Microsystem Technologies*, 2018, 37 (12): 114-117, 121. DOI: 10.13873/J.1000-9787(2018)12-0114-04.
- [7] 曾氢菲, 刘雪梅, 邱呈溶. 多臂协同焊接机器人运动学逆解及误差分析[J]. *焊接学报*, 2019, 40(11): 21-27, 162. DOI: 10.12073/j.hjxb.2019400282. ZENG Qingfei, LIU Xuemei, QIU Chengrong. Inverse kinematics and error analysis of cooperative welding robot with multiple manipulators [J]. *Transactions of the China Welding Institution*, 2019, 40(11): 21-27, 162. DOI: 10.12073/j.hjxb.2019400282.
- [8] 石建平, 李培生, 刘国平, 等. 基于改进克隆选择算法的机械臂运动学逆解[J]. *计算机集成制造系统*, 2021, 27(10): 2929-2939. DOI: 10.13196/j.cims.2021.10.017. SHI Jianping, LI Peisheng, LIU Guoping, et al. Inverse kinematics of manipulator based on improved clonal selection algorithm [J]. *Computer Integrated Manufacturing Systems*, 2021, 27(10): 2929-2939. DOI: 10.13196/j.cims.2021.10.017.
- [9] DERELI S, KÖKER R. A meta-heuristic proposal for inverse kinematics solution of 7-DOF serial robotic manipulator: quantum behaved particle swarm algorithm [J]. *Artificial Intelligence Review*, 2020, 53 (2): 949-964. DOI: 10.1007/s10462-019-09683-x.
- [10] DENG H, XIE C. An improved particle swarm optimization algorithm for inverse kinematics solution of multi-DOF serial robotic manipulators [J]. *Soft Computing*, 2021, 25 (21): 13695-13708. DOI: 10.1007/s00500-021-06007-6.
- [11] 武明虎, 周喜悦, 庆毅辉, 等. 基于改进自适应粒子群算法的机器人逆解研究[J]. *组合机床与自动化加工技术*, 2021 (1): 1-4. DOI: 10.13462/j.cnki.mmtamt.2021.01.001. WU Minghu, ZHOU Xiyue, QING Yihui, et al. Research on robot inverse kinematics based on improved adaptive particle swarm algorithm [J]. *Modular Machine Tool & Automatic Manufacturing Technique*, 2021 (1): 1-4. DOI: 10.13462/j.cnki.mmtamt.2021.01.001.
- [12] NI Z S, WU R K. 6R robot inverse solution algorithm based on quaternion matrix and Groebner base [J]. *Advances in Linear Algebra & Matrix Theory*, 2018, 8 (1): 33-40. DOI: 10.4236/alamt.2018.81004.
- [13] 李志鹏, 王阳, 刘灿, 等. 基于人工蜂群算法的供水泵站系统节能研究[J]. *长沙理工大学学报(自然科学版)*, 2021, 18(4): 83-88. DOI: 10.19951/j.cnki.csldgxbzkb.2021.04.007. LI Zhipeng, WANG Yang, LIU Can, et al. Research on energy saving of water supply pumping station system based on artificial bee colony algorithm [J]. *Journal of Changsha University of Science & Technology (Natural Science)*, 2021, 18(4): 83-88. DOI: 10.19951/j.cnki.csldgxbzkb.2021.04.007.
- [14] CHENG X, ZHAO M. The inverse solution algorithm and trajectory error analysis of robotic arm based on MQACA-RBF network [J]. *Journal of Robotics*, 2020, 2020: 7807952. DOI: 10.1155/2020/7807952.
- [15] 杨明, 周斯维, 谷健. 基于数据驱动的城市居民出行 OD 预测[J]. *长沙理工大学学报(自然科学版)*, 2022, 19(1): 73-80. DOI: 10.19951/j.cnki.1672-9331.2022.01.009. YANG Ming, ZHOU Siwei, GU Jian. Traffic OD prediction of urban residents based on data driven [J]. *Journal of Changsha University of Science & Technology (Natural Science)*, 2022, 19(1): 73-80. DOI: 10.19951/j.cnki.1672-9331.2022.01.009.
- [16] GAO R H. Inverse kinematics solution of robotics based on neural network algorithms [J]. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*, 2020, 11 (12): 6199-6209. DOI: 10.1007/s12652-020-01815-4.
- [17] 郑涛, 李海, 张晓庆, 等. 基于 Halton 序列布谷鸟算法的机械臂逆运动学分析[J]. *机械设计与研究*, 2020, 36 (5): 60-63, 74. DOI: 10.13952/j.cnki.jofmdr.2020.0192. ZHENG Tao, LI Hai, ZHANG Xiaoqing, et al.

- Research on inverse kinematics of cuckoo algorithm manipulator based on Halton sequence [J]. Machine Design & Research, 2020, 36(5): 60-63, 74. DOI: 10.13952/j.cnki.jofmdr.2020.0192.
- [18] 李立君, 刘涛, 高自成, 等. 基于旋量理论的六自由度林果采摘混联机械臂运动学逆解[J]. 农业工程学报, 2019, 35(8): 75-82. DOI: 10.11975/j.issn.1002-6819.2019.08.009.
- LI Lijun, LIU Tao, GAO Zicheng, et al. Inverse kinematics of 6-DOF hybrid manipulator for forest-fruit harvest based on screw theory [J]. Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering, 2019, 35(8): 75-82. DOI: 10.11975/j.issn.1002-6819.2019.08.009.
- [19] 刘国平, 杨先永, 钟飞飞, 等. 六自由度机械臂运动学旋量逆解及简化算法[J]. 组合机床与自动化加工技术, 2021(9): 11-15. DOI: 10.13462/j.cnki.mmtamt.2021.09.003.
- LIU Guoping, YANG Xianyong, ZHONG Feifei, et al. Kinematics screw inverse solution and simplified algorithm of 6-DOF manipulator [J]. Modular Machine Tool & Automatic Manufacturing Technique, 2021(9): 11-15. DOI: 10.13462/j.cnki.mmtamt.2021.09.003.
- [20] 崔晨, 李丽宏. 人脸追踪机械臂的运动学研究[J]. 兵器装备工程学报, 2019, 40(10): 200-204, 210. DOI: 10.11809/bqzbgcxb2019.10.042.
- CUI Chen, LI Lihong. Kinematics study of face tracking manipulator [J]. Journal of Ordnance Equipment Engineering, 2019, 40(10): 200-204, 210. DOI: 10.11809/bqzbgcxb2019.10.042.
- [21] 叶上高, 刘电霆. 机器人运动学逆解及奇异和多解的处理[J]. 机床与液压, 2014, 42(3): 27-29. DOI: 10.3969/j.issn.1001-3881.2014.03.008.
- YE Shangao, LIU Dianting. Robot inverse kinematics algorithm including multi-solutions and singularity analysis [J]. Machine Tool & Hydraulics, 2014, 42(3): 27-29. DOI: 10.3969/j.issn.1001-3881.2014.03.008.
- [22] 刘晓刚, 陶凤荣. 几何的6R串联型焊接机器人运动学逆解算法[J]. 机械设计与制造, 2015(2): 29-31, 35. DOI: 10.19356/j.cnki.1001-3997.2015.02.009.
- LIU Xiaogang, TAO Fengrong. Algorithm for the inverse kinematics calculation of 6-DOF serial welding robots based on geometry [J]. Machinery Design & Manufacture, 2015(2): 29-31, 35. DOI: 10.19356/j.cnki.1001-3997.2015.02.009.
- [23] 刘晨荣, 王宇翔, 张康宁. 基于工业机器人形位的运动学逆解分析[J]. 机床与液压, 2017, 45(11): 51-54, 68. DOI: 10.3969/j.issn.1001-3881.2017.11.012.
- LIU Chenrong, WANG Yuxiang, ZHANG Kangning. Inverse kinematics analysis of the industrial robot based on arm configuration [J]. Machine Tool & Hydraulics, 2017, 45(11): 51-54, 68. DOI: 10.3969/j.issn.1001-3881.2017.11.012.

(责任编辑:刘平;校对:赵冰 彭三军;英文编辑:彭卓寅)