

文章编号:1672-9331(2021)04-0074-09

考虑地震荷载的框架结构拓扑优化设计

荣见华¹,李政威¹,赵志军²,赵磊³

(1.长沙理工大学汽车与机械工程学院,湖南长沙 410114;2.长沙学院土木工程学院,湖南长沙 410022;
3.长沙理工大学土木工程学院,湖南长沙 410114)

摘要:为研究考虑地震荷载的框架结构拓扑优化设计,引入改进的多项式刚度矩阵惩罚模型和基于低阶模态能的伪模态识别准则和删除措施,综合解决了伪模态问题和惯性荷载作用下结构低密度区域的寄生效应问题;采用 Heaviside 函数建立了设计变量与物理变量之间的映射关系,并构建了地震荷载作用下以结构模态柔顺度总和最小为目标函数、满足体积约束的框架结构拓扑优化模型;采用移动渐近线方法对优化模型进行了求解。算例的计算结果表明:采用本研究提出的方法可以得到清晰的 0/1 分布的优化拓扑,且结构的设计域质量对优化结果有很大的影响,这验证了本研究方法的正确性和有效性。

关键词:拓扑优化;地震荷载;框架结构;支流质量;伪模态

中图分类号: TH122

文献标志码: A

Topology optimization design of frame structure considering seismic load

RONG Jian-hua¹, LI Zheng-wei¹, ZHAO Zhi-jun², ZHAO Lei³

(1. School of Automotive & Mechanical Engineering, Changsha University of Science & Technology, Changsha 410114, China; 2. School of Civil Engineering, Changsha University, Changsha 410022, China; 3. School of Civil Engineering, Changsha University of Science & Technology, Changsha 410114, China)

Abstract: In order to study the topology optimization design of frame structure considering seismic load, the pseudo modal identification criteria and deletion measures based on low order modal energy and the improved polynomial stiffness matrix penalty model were introduced to solve the pseudo modal problems and the parasitic effects of low density areas of the structures under inertial loads. The mapping relationship between design variables and physical variables was established by using the Heaviside function, and the topological optimization model of frame structure was constructed, whose objective function was that the sum of structural modal compliance under the seismic loads was minimal and constraints were the volume constraint. The method of moving asymptotes was used to solve the optimization model. The results of the examples show that the proposed method can obtain a clear 0/1 distribution topology, and the masses of the design domain have serious impacts on the optimization results, which verifies the correctness and effectiveness of the proposed method.

Key words: topology optimization; seismic load; frame structure; tributary mass; pseudo modal

收稿日期:2021-04-09

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11772070,11372055);湖南省教育厅科学研究项目(19C0173);中国建筑第五工程局有限公司科研项目(3030402)

通讯作者:荣见华(1963—),男,教授,主要从事结构拓扑优化设计方面的研究。E-mail:rongjhua@aliyun.com

拓扑优化方法是一种能有效获得结构材料优化分布的方法^[1-2],被广泛地应用于机械和航空航天等工程领域^[3-5]。国内外学者对静态荷载下的拓扑优化进行了大量的研究^[6-7],并取得了许多理论和应用成果。目前,已形成了几种典型的拓扑优化方法,包括基于密度的实体各向同性材料惩罚(solid isotropic material with penalization, SIMP)^[8]、渐进结构优化(evolutionary structural optimization, ESO)、水平集(level set method, LSM)、移动可变形构件与移动可变形空隙(moving morphable components/moving morphable voids, MMC/MMV)等方法。其中, SIMP 方法是最流行的拓扑优化方法。

近 20 年来,涉及动力学特性的拓扑优化发展较快。早期的拓扑优化研究大多与固有频率有关^[9],并解决了与动力学拓扑优化相关的伪模态问题。目前,考虑动力学的拓扑优化研究大致可分为 4 个方面:① 结构特征频率优化设计;② 简谐激励下结构动态柔度的最小化优化设计;③ 随机结构动力学优化设计;④ 基于等效静荷载(equivalent static load, ESL)的几何或材料非线性结构动力学拓扑优化设计。基于 SIMP 法和 LSM 法等拓扑优化方法,利用模态综合法等模型的降阶计算措施,许多学者研究了平稳随机响应约束、能量获取性能最大化、经典阻尼线性动力系统和阻尼结构等拓扑优化设计问题,并取得了很多研究成果。

然而,关于承受基础动态运动的载运工具或机械设备,以及考虑地震荷载建筑等的结构拓扑优化问题的研究文献相对较少。对于地震荷载问题, NIU 等^[10]研究了替代动态柔度的各种目标函数。因求解动态状态方程需在目标范围内的每个离散频率处使用具有复杂算法的线性系统求解器,故在解决动态柔度问题时常存在计算量大的缺点,而模态分解分析法是一种很有前景的解决动态柔度问题的方法。HAJIRASOULIHA 等^[11]研究了随机地震作用下桁架结构的拓扑优化设计。李栋泓^[12]、白显中^[13]将时域显式法分别引入非平稳随机地震荷载作用下的桁架结构和连续体拓扑优化问题中。但是,平稳高斯随机运动激励

谱不同于地震荷载谱。最近, MARTIN 等^[14]基于地震荷载谱研究了框架结构模态柔顺度总和最小的拓扑优化问题,但忽略了设计域质量惯性力的影响。

按照结构形式分类,结构拓扑优化方法可分为离散结构拓扑优化方法和上述连续体结构拓扑优化方法两大类。离散体结构优化最早可追溯到 1904 年, MICHELL^[15]使用解析法研究了以结构质量最小化为目标的桁架优化问题。1964 年, DORN 等^[16]提出了基结构法(ground structure approach, GSA)。此后,大量围绕基结构法的离散体结构优化的研究工作得以逐步展开。到目前为止,地震荷载作用下的结构拓扑优化设计大都采用连续体结构拓扑优化方法来得到类框架拓扑,较少采用离散结构拓扑优化方法研究地震荷载作用下框架结构的拓扑优化设计,而同时处理伪模态问题和与设计变量相关的荷载作用下结构低密度区域寄生效应问题的研究则更少。与连续体结构拓扑优化相比,离散体结构拓扑优化的有限元分析及相关灵敏度等的计算量小,且易于应用于框架类结构设计。

本研究针对地震荷载下框架结构的拓扑优化问题,采用梁单元构建离散体结构设计域;引入拓扑变量和 Heaviside 映射技术,克服优化过程中的结构灰度问题;采用改进的刚度矩阵惩罚模型,并结合基于低阶模态能的伪模态识别准则和删除措施,同时处理拓扑优化中的伪模态问题和与设计变量相关的荷载作用下结构低密度区域的寄生效应问题;以模态柔顺度总和最小为目标函数、以体积为约束条件,构建框架结构拓扑优化模型,采用移动渐近线方法(method of moving asymptotes, MMA)对该模型进行求解;最后,用两个算例对模型进行了验证。

1 惩罚模型

在与设计变量相关的荷载作用下,使用传统的 SIMP 方法进行结构拓扑优化会导致低密度区域的寄生效应问题^[17],即在考虑自重时,会出现结构无法支撑自身重量,从而导致在优化结果中材

料分布模糊的情况。为了解决寄生效应问题, ZHU 等^[18]提出了一种光滑多项式惩罚模型, 研究了考虑惯性力的动力学结构拓扑优化设计。本研究采用文献[18]中改进的多项式惩罚函数 $f_K(\tilde{x}_e)$ 构建第 e 号梁单元刚度矩阵惩罚模型。单元刚度矩阵、质量矩阵和体积的惩罚函数分别表示如下:

$$\begin{cases} f_K(\tilde{x}_e) = \left(\frac{p-1}{p} \tilde{x}_e^{\alpha_K} + \frac{1}{p} \tilde{x}_e^{\alpha_M} \right) \\ f_M(\tilde{x}_e) = (\tilde{x}_e)^{\alpha_M} \\ f_V(\tilde{x}_e) = (\tilde{x}_e)^{\alpha_V} \end{cases} \quad (1)$$

式中: \tilde{x}_e 为单元拓扑变量; p , α_K , α_M 和 α_V 为经验参数。本研究的算例中如无特殊说明, p 取为 16, α_K 取为 3.05, α_M 取为 1.05, α_V 取为 1。

第 e 号梁单元的刚度矩阵、质量矩阵和体积惩罚模型见下式:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_e = f_K(\tilde{x}_e) \mathbf{K}_{e,0} \\ \mathbf{M}_e = f_M(\tilde{x}_e) \mathbf{M}_{e,0} \\ V_e = f_V(\tilde{x}_e) V_{e,0} \end{cases} \quad (2)$$

式中: $\mathbf{K}_{e,0}$ 为总体坐标下第 e 号梁单元的固有刚度矩阵; \mathbf{K}_e 为第 e 号梁单元的刚度矩阵; $\mathbf{M}_{e,0}$ 为总体坐标下第 e 号梁单元的固有质量矩阵; \mathbf{M}_e 为第 e 号梁单元的质量矩阵; $V_{e,0}$ 为第 e 号梁单元的固有体积; V_e 为第 e 号梁单元的体积。

为了解决结构单元的灰度问题, 采用 Heaviside 映射技术形成设计变量 x_e 与拓扑变量 \tilde{x}_e 之间的映射, 可表示为^[19-20]:

$$\tilde{x}_e = 1 - e^{-\beta x_e} + x_e e^{-\beta} \quad (3)$$

式中: β 为曲率参数。在本研究的所有算例中, β 的初始值为 0, 此后每 50 迭代步 β 更新一次。

将式(3)对设计变量 x_e 求导后, 可得:

$$\frac{\partial \tilde{x}_e}{\partial x_e} = \beta e^{-\beta x_e} + e^{-\beta} \quad (4)$$

2 抗震结构振动方程及分析

动态拓扑优化的目标是设计抗侧向力系统。对于抗震建筑设计, 大部分质量是支流质量, 由重力框架、建筑饰面、人群质量和其他元素组成。抗侧向力系统的结构质量, 即设计域质量 \mathbf{M}_Ω 明显小于支流质量 \mathbf{M}_{trib} 的总和。地震加速度会使结构

系统的支流质量和设计域质量产生运动, 进而产生惯性力, 而惯性力需要横向力对冲系统的抵抗以保证结构系统的安全。

在地震荷载作用下, 结构系统振动方程可表示为:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_s(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = 0 \quad (5)$$

式中: \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} 分别为总的结构系统质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵; $\ddot{\mathbf{u}}_s(t)$ 为结构系统总加速度向量; $\dot{\mathbf{u}}(t)$ 为相对速度向量。

结构系统总位移 $\mathbf{u}_s(t)$ 为相对运动位移 $\mathbf{u}(t)$ 与直接由支承运动(沿 x 方向运动)产生的位移 $\mathbf{u}_r(t)$ 之和:

$$\mathbf{u}_s(t) = \mathbf{u}(t) + \mathbf{I} \mathbf{u}_r(t) \quad (6)$$

本研究称 \mathbf{I} 为一致向量, 其维度 = 节点数 \times 节点自由度。处于空间任一方位的等截面直梁单元有 a , b 两个节点, 每个节点有 6 个自由度, 如对于 a 节点, 分别有 3 个线位移 u_a , v_a , w_a 和 3 个角位移 θ_{xa} , θ_{ya} , θ_{za} , 其余节点以此类推。相应的 \mathbf{I} 可表示为:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \underbrace{1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0}_{a \text{ node}} \cdots \underbrace{1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0}_{b \text{ node}} \\ u_a \ v_a \ w_a \ \theta_{xa} \ \theta_{ya} \ \theta_{za} \quad u_b \ v_b \ w_b \ \theta_{xb} \ \theta_{yb} \ \theta_{zb} \end{pmatrix}^T \quad (7)$$

将式(6)代入式(5), 可得到相对运动的振动方程为:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (8)$$

$\mathbf{f}(t)$ 与结构的质量直接相关, 可表示为:

$$\mathbf{f}(t) = -\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_r(t) \quad (9)$$

在一般线性系统的地震响应分析中, 通常采用模态叠加法就可得到较好的多自由度系统地震响应近似解。设第 j 阶模态响应下的相对位移为:

$$\mathbf{u}_j(t) = \boldsymbol{\varphi}_j Y_j(t) \quad (10)$$

式中: $\boldsymbol{\varphi}_j$ 为第 j 阶模态振型; $Y_j(t)$ 为模态响应的振幅。

假设阻尼矩阵和质量矩阵、刚度矩阵有相同的正交条件。对式(8)中的每一项左乘 $\boldsymbol{\varphi}_j^T$, 则产生多个解耦的模态方程:

$$M_j \ddot{Y}_j(t) + C_j \dot{Y}_j(t) + K_j Y_j(t) = f_j(t) \quad (11)$$

式中: M_j , C_j , K_j 为与模态相关的广义值, 且

$M_j = \boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_j$, C_j 和 K_j 的关系式与 M_j 的类似。

忽略式(9)中的负号,由地震激励引起的模态广义力为:

$$f_j(t) = \boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{f}(t) = L_j \ddot{u}_r(t) \quad (12)$$

式中: L_j 为模态地震激励因子,且 $L_j \equiv \boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M} \mathbf{I}$ 。

借鉴单自由度系统的推导过程^[21],可得多自由度系统的响应为:

$$Y_j(t) \equiv \frac{L_j}{M_j \omega_j} V_j(t) \quad (13)$$

式中: $V_j(t)$ 为取决于阻尼比和频率 ω_j 的模态地震响应积分。

则第 j 阶模态响应的相对位移向量和相关的弹性力可表示为:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_j(t) = \boldsymbol{\varphi}_j \frac{L_j}{M_j \omega_j} V_j(t) \\ \mathbf{F}_j(t) = \mathbf{K} \mathbf{u}_j(t) = \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_j Y_j(t) \end{cases} \quad (14)$$

利用第 j 个模态的结构特征方程,由式(13)和(14)可得:

$$\mathbf{F}_j(t) = \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_j \omega_j^2 Y_j(t) = \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_j \frac{L_j}{M_j} \omega_j V_j(t) \quad (15)$$

若 $S_a(T_j) = \omega_j V_j(t)$ 为给定地震响应谱在周期 $T_j = 2\pi/\omega_j$ 时的加速度, $\Gamma_j = L_j/M_j$ 为质量标准化模态参与因子,则有:

$$\mathbf{F}_j = \Gamma_j \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_j S_a(T_j) \quad (16)$$

值得注意的是,式(16)中用到的结构系统质量矩阵必须是总质量矩阵,且不可忽略设计域质量对等效模态力的影响。对每个模态 j 施加等效模态力 \mathbf{F}_j ,然后求解结构静力方程 $\mathbf{U}_j = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_j$,得到峰值模态位移矢量 \mathbf{U}_j 。

在地震荷载下结构系统的拓扑优化问题中,用于计算特征频率和特征模态的系统总质量可分解为:

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \mathbf{M}_{\text{trib}} + \mathbf{M}_\Omega(\mathbf{x}) \quad (17)$$

式中: \mathbf{M} 为总质量; \mathbf{M}_{trib} 为支流质量; \mathbf{M}_Ω 为设计域质量,即抗侧向力系统的质量。在拓扑优化问题中,支流质量与设计变量无关,即 $\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{M}_{\text{trib}} = 0$ 。

3 伪模态识别准则

由于设计域的质量惯性力会引起结构拓扑优化时低密度单元的寄生效应^[17],虽然在结构拓扑

优化时使用了第 2 节中的光滑多项式惩罚模型,但还是不能完全避免低阶伪模态^[18]的出现。本研究基于低阶模态能,构建低阶伪模态识别准则和删除措施以完全解决伪模态问题。

首先选定阈值 \tilde{x}_{Th} ,用于界定结构拓扑低密度节点与高密度节点,本研究选取 $\tilde{x}_{\text{Th}} = 0.1$ 。通过对相连单元的相对密度 \tilde{x}_e 进行平均,获得结构拓扑节点密度 $\tilde{x}_{l,N}$ 。定义高密度节点和低密度节点的集合分别为 $N_{\text{Node,H}} = \{l \mid \tilde{x}_{l,N} > \tilde{x}_{\text{Th}}, 1 \leq l \leq N_{\text{Node}}\}$, $N_{\text{Node,L}} = \{l \mid \tilde{x}_{l,N} \leq \tilde{x}_{\text{Th}}, 1 \leq l \leq N_{\text{Node}}\}$,其中 N_{Node} 为框架结构有限元节点总数。则第 j 阶特征矢量 $\boldsymbol{\varphi}_j$ 可分解为:

$$\boldsymbol{\varphi}_j = \boldsymbol{\varphi}_{j,L} + \boldsymbol{\varphi}_{j,H} \quad (18)$$

式中: $\boldsymbol{\varphi}_{j,L}$ 为低密度节点区域对应的模态向量,其中,集合 $N_{\text{Node,L}}$ 中节点自由度相应位置的值与该阶特征向量中的相同,而其他自由度相应位置的值为 0; $\boldsymbol{\varphi}_{j,H}$ 为高密度节点区域对应的模态向量,其中,集合 $N_{\text{Node,H}}$ 中节点自由度相应位置的值与该阶特征向量中的相同,而其他自由度相应位置的值为 0。则低密度区的模态应变能之比 $r_{j,L}$ 可表示为:

$$r_{j,L} = \frac{(\boldsymbol{\varphi}_{j,L})^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_j}{\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_j} \quad (19)$$

由此,定义伪模态识别准则如下:

$$r_{j,L} > W \quad (20)$$

式中: W 为给定的经验值,用于模态判定。当 $r_{j,L} > W$ 时,判定模态 $\boldsymbol{\varphi}_{j,L}$ 为伪模态,应予以删除。在本研究中,如无特殊说明,取 $W = 0.3$ 。

4 拓扑优化模型

本研究假设组成结构的都是梁构件,考虑拉压、扭转、弯曲变形等多个固有模态,构建以模态柔顺度总和(sum of modal compliance, SMC)最小为目标函数的拓扑优化模型。考虑到仅用优化结构体积上限约束不能很好地控制结构体积比,本研究引入两个主动变体积不等式约束^[22]。由此,可得考虑地震荷载的框架结构拓扑优化模型为:

$$[\text{find } \mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_{n_e}]^T$$

$$\min_{\mathbf{x}} \Phi_{\text{SMC}}(\mathbf{x}, \mathbf{U}) = \sum_{j=1}^m \mathbf{F}_j^T(\mathbf{x}) \mathbf{U}_j(\mathbf{x})$$

$$\text{s. t. } [\mathbf{K} - \omega_j^2 \mathbf{M}] \boldsymbol{\varphi}_j = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^{n_e} f_V(\tilde{x}_e) V_{e,0} / V_{C(0)} - V_{U,C(i)} \leq 0 \\ V_2(\mathbf{x}) = - \sum_{e=1}^{n_e} f_V(\tilde{x}_e) V_{e,0} / V_{C(0)} + \\ (1-\theta) V_{U,C(i)} \leq 0 \\ 0 < x_{\min} \leq x_e \leq 1 \end{array} \right.$$

(21)

式中: \tilde{x}_e 为第 e 号单元的拓扑变量, 当其值为 0 时, 表示该单元不存在, 当其值为 1 时, 表示该单元存在; x_e 为第 e 号单元的设计变量, 当 $0 < x_e < 1$ 时, 表示该单元处在从无到有的过渡状态, 给设计变量引入一个正数下限 x_{\min} , 以避免在数值求解时刚度矩阵出现奇异; Φ_{SMC} 为模态柔顺度的总和; \mathbf{F}_j 为第 j 阶模态的地震荷载向量; \mathbf{U}_j 为第 j 阶模态的位移矢量; θ 为体积下限松弛参数, 本研究取 $\theta = 0.004$; $V_{C(0)}$ 为优化前的结构总体积; $V_{U,C(i)}$ 为第 i 循环迭代步的目标结构总体积分数限, 可由下式求得:

当 $i=1$ 或 $i \in B$ 时:

$$\begin{aligned} V_{U,C(i)} = & \\ \left\{ \begin{array}{l} V_{C(i-1)} - \min(\gamma, |V^* - V_{C(i-1)}|) V_{C(i-1)} \geq V^* \\ V_{C(i-1)} + \min(\gamma, |V^* - V_{C(i-1)}|) V_{C(i-1)} < V^* \end{array} \right. & \end{aligned} \quad (22a)$$

当 $i \notin B$ 且 $i=2, 3, \dots$ 时:

$$\begin{aligned} V_{U,C(i)} = & \\ \left\{ \begin{array}{l} \max[(V_{U,C(i-1)} - \gamma), V^*], V_{C(i-1)} \geq V^* \\ \min[(V_{U,C(i-1)} + \gamma), V^*], V_{C(i-1)} < V^* \end{array} \right. & \end{aligned} \quad (22b)$$

式中: $V_{C(i-1)}$ 为第 $i-1$ 循环迭代步得到的结构总体积; V^* 为当前结构总体积; γ 为变体积限的步长参数, 取值为 $0.005 \sim 0.035$; B 为 Heaviside 映射曲率参数变化后前 3 个迭代步编号的集合。

5 灵敏度分析

梯度计算对拓扑优化问题的求解很重要。根据求导的链式法则, 任意函数 $f(\mathbf{x})$ 对设计变量

x_e 的导数可表示为:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_e} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \tilde{x}_e} \frac{\partial \tilde{x}_e}{\partial x_e} \quad (23)$$

总体刚度矩阵对某一单元拓扑变量的导数可表示为:

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{K} / \partial \tilde{x}_e = & \\ \partial \left\{ \sum \left[\frac{(p-1)}{p} \tilde{x}_e^{a_K} + \frac{1}{p} \tilde{x}_e^{a_M} \right] \mathbf{K}_{e,0} \right\} / \partial \tilde{x}_e = & \\ \left[\frac{(p-1)}{p} a_K \tilde{x}_e^{(a_K-1)} + \frac{1}{p} a_M \tilde{x}_e^{(a_M-1)} \right] \mathbf{K}_{e,0} & \end{aligned} \quad (24)$$

整体质量矩阵对某一单元拓扑变量的导数可表示为:

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{M} / \partial \tilde{x}_e = \partial \left(\sum (\tilde{x}_e)^{a_M} \mathbf{M}_{e,0} \right) / \partial \tilde{x}_e = & \\ a_M (\tilde{x}_e)^{(a_M-1)} \mathbf{M}_{e,0} & \end{aligned} \quad (25)$$

模态柔顺度总和对某一单元拓扑变量的导数可表示为:

$$\frac{\partial \Phi_{\text{SMC}}}{\partial \tilde{x}_e} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \Phi_j}{\partial \tilde{x}_e} \quad (26)$$

式中: $\Phi_j = \mathbf{F}_j^T \mathbf{U}_j$ 为结构第 j 阶模态柔顺度。

采用伴随方法^[23], 定义 $\tilde{\Phi}_j$ 如下:

$$\tilde{\Phi}_j = \mathbf{U}_j^T \mathbf{K} \mathbf{U}_j + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{K} \mathbf{U}_j - \mathbf{F}_j) \quad (27)$$

式中: $\boldsymbol{\lambda}$ 为一个任意的伴随位移向量。因为对任意分解模态总有 $\mathbf{K} \mathbf{U}_j = \mathbf{F}_j$, 所以 $\boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{K} \mathbf{U}_j - \mathbf{F}_j)$ 项总是为 0, 即 $\tilde{\Phi}_j$ 与 Φ_j 实际上是一致的。 $\tilde{\Phi}_j$ 对拓扑变量的导数为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\Phi}_j}{\partial \tilde{x}_e} = (\mathbf{U}_j + \boldsymbol{\lambda})^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \tilde{x}_e} \mathbf{U}_j + & \\ (2 \mathbf{U}_j + \boldsymbol{\lambda})^T \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{U}_j}{\partial \tilde{x}_e} - \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial \tilde{x}_e} & \end{aligned} \quad (28)$$

设 $\boldsymbol{\lambda} = -2\mathbf{U}$, 则可将式(28)转化为:

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}_j}{\partial \tilde{x}_e} = -\mathbf{U}_j^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \tilde{x}_e} \mathbf{U}_j + 2 \mathbf{U}_j^T \frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial \tilde{x}_e} \quad (29)$$

将式(29)代入式(26), 则目标函数的灵敏度可表示为:

$$\frac{\partial \Phi_{\text{SMC}}}{\partial \tilde{x}_e} = \sum_{j=1}^m \left(-\mathbf{U}_j^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \tilde{x}_e} \mathbf{U}_j + 2 \mathbf{U}_j^T \frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial \tilde{x}_e} \right) \quad (30)$$

在 MARTIN 等^[14]的抗震连续体结构拓扑优化设计中, 忽略了结构质量惯性力对构型的影响, 即假定 $\mathbf{F}_j = \Gamma_j \mathbf{M}_{\text{trib}} \boldsymbol{\varphi}_j S_a(T_j)$ 以及 $\partial \mathbf{F}_j / \partial \tilde{x}_e = 0$ 。仿真算例表明, 该假定会严重影响最后获得的优化拓扑。

将等效模态力对拓扑变量求导可得:

$$\frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial \tilde{x}_e} = \frac{\partial \Gamma_j}{\partial \tilde{x}_e} \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_j S_a(T_j) + \Gamma_j \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \tilde{x}_e} \boldsymbol{\varphi}_j S_a(T_j) + \Gamma_j \mathbf{M} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_j}{\partial \tilde{x}_e} S_a(T_j) \quad (31)$$

参照赵志军等^[24]的方法,假设第 j 阶振型向量的导数可近似表示为:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_j}{\partial \tilde{x}_e} = \sum_{k=1}^n \delta_{jk,e} \boldsymbol{\varphi}_k \quad (32)$$

式中: $\delta_{jk,e}$ 为待定系数。

式(32)表明,第 j 阶振型向量的导数由 k 阶振型向量线性组合而成。

当 $k \neq j$ 时,由对称矩阵的正交性可得 $\delta_{jk,e}$ 的表达式为:

$$\delta_{jk,e} = \frac{\boldsymbol{\varphi}_k^T \left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \tilde{x}_e} - \omega_j^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \tilde{x}_e} \right] \boldsymbol{\varphi}_j}{\omega_j^2 - \omega_k^2} \quad (33)$$

当 $k = j$ 时,系数 $\delta_{jj,e}$ 为:

$$\delta_{jj,e} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi}_j^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \tilde{x}_e} \boldsymbol{\varphi}_j \quad (34)$$

将式(24),(25),(33),(34)代入式(32)就可以得到第 j 阶模态特征向量的导数。

基于 $\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_j = 1$ 和 $\Gamma_j = \frac{L_j}{M_j}$,可得:

$$\frac{\partial \Gamma_j}{\partial \tilde{x}_e} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_j^T}{\partial \tilde{x}_e} \mathbf{M} \mathbf{I} + \boldsymbol{\varphi}_j^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \tilde{x}_e} \mathbf{I} \quad (35)$$

把式(29),(32),(35)代入式(31)可得到等效模态力对拓扑变量的导数。

最后,主动变体约束的灵敏度可表示为:

$$\frac{\partial V_1(\mathbf{x})}{\partial \tilde{x}_e} = \alpha_V \tilde{x}_e^{(\alpha_V-1)} V_{e,0} / V_{(0)} \quad (36a)$$

$$\frac{\partial V_2(\mathbf{x})}{\partial \tilde{x}_e} = -\alpha_V \tilde{x}_e^{(\alpha_V-1)} V_{e,0} / V_{(0)} \quad (36b)$$

6 算例分析

6.1 二维抗震框架结构

图 1 所示为二维框架结构抗震优化设计的初始域,尺寸为 $16 \text{ m} \times 80 \text{ m}$,是一个共有 20 层的侧向力抵抗系统,支流质量分布在结构设计域两侧红色三角形处,结构底部与地面固定连接。材料的弹性模量 $E=200 \text{ GPa}$,泊松比 $\mu=0.3$,密度 $\rho=7850 \text{ kg/m}^3$,梁单元截面半径 $r=0.225 \text{ m}$,目标

体积与设计域初始体积之比 V^* 取为 0.15。地震设计响应谱的加速度可定义为:

$$S_a(T_j) = \begin{cases} 1.5g, & T_j \leq 0.6 \text{ s} \\ 0.9g/T_j, & T_j > 0.6 \text{ s} \end{cases} \quad (37)$$

式中: g 为重力加速度。

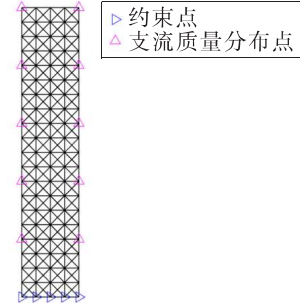


图 1 初始设计域示意图

Fig. 1 Schematic diagram of initial design domain

仅截取 12 阶模态进行响应分析。采用本研究方法可求解得到不同支流质量与设计域质量比例下的优化拓扑构型。通过分析计算结果可以发现,在支流质量较小时式(1)的惩罚模型不能避免低阶伪模态。当图 1 中每个红色三角形处的支流质量为 $9.00 \times 10^4 \text{ kg}$ 时,结构初始模态柔顺度总和为 $3.74 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。图 2 所示为由本研究方法获得的有低阶伪模态识别及删除措施和无低阶伪模态识别及删除措施的框架结构目标函数优化历程曲线。

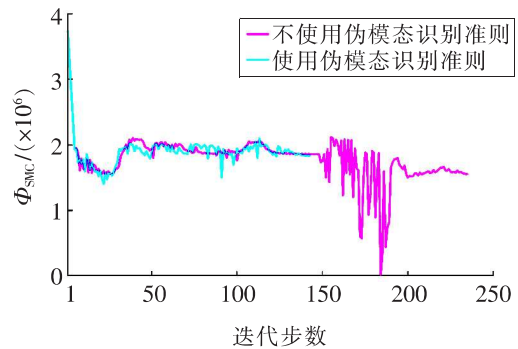


图 2 优化历程曲线

Fig. 2 Optimization course curves

图 3 所示为 3 种情况下的拓扑构型。分析图 2 中的红色曲线及图 3(b)可以发现,当优化迭代到 152 步时,优化结构开始出现一些低阶伪模态,这些低阶伪模态会引起目标函数及构型发生振荡;模态柔顺度总和在 185 步时急剧下降且优化结构遭到破坏。最后得到的构型含有很多中间密度单元的解,如图 3(c)所示。采取伪模态识别准则及删除措施能较好地解决这一问题($W=0.4$)。

此时,优化解能快速收敛为图 3(a)所示的优化构型,且模态柔顺度总和为 $1.84 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。当采取 15 阶模态分析时,其优化结果与图 3(a)接近。

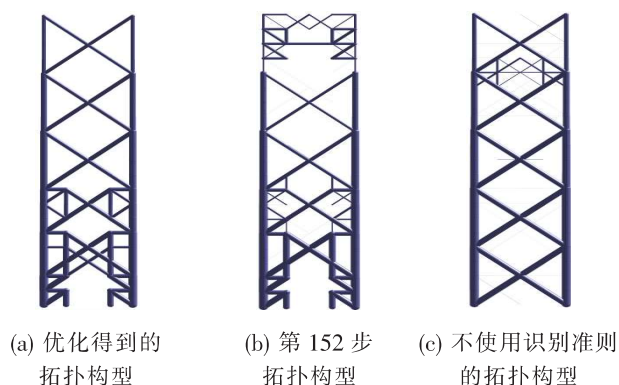


图 3 拓扑构型

Fig. 3 Topological configurations

图 4 所示为图 1 中每个红色三角形处支流质量分别为 9.00×10^4 , 4.53×10^6 和 $4.53 \times 10^7 \text{ kg}$ 时的结构抗震优化构型。分析图 4 可以发现,结构材料自下而上逐渐减少,且支流质量越小该趋势越明显。当支流质量较小时,设计域质量惯性力对优化结果的影响较大。

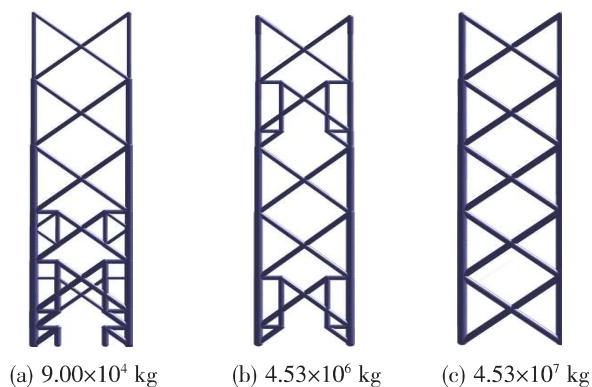


图 4 不同支流质量下优化获得的拓扑构型

Fig. 4 Optimized topological configurations with different tributary masses

图 4(b)所示的抗震结构模态柔顺度总和及目标体积比历程曲线和拓扑构型的历程见图 5。图 6 所示为不同支流质量下本研究获得的归一化后目标函数的历程曲线。在每个红色三角形处的支流质量分别为 4.53×10^6 , $4.53 \times 10^7 \text{ kg}$ 时,结构初始的模态柔顺度总和分别为 8.41×10^7 , $8.48 \times 10^8 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。上述分析结果表明:若结构支流质量与设计域质量的比例不同,则由本研究得到的构型也不同。

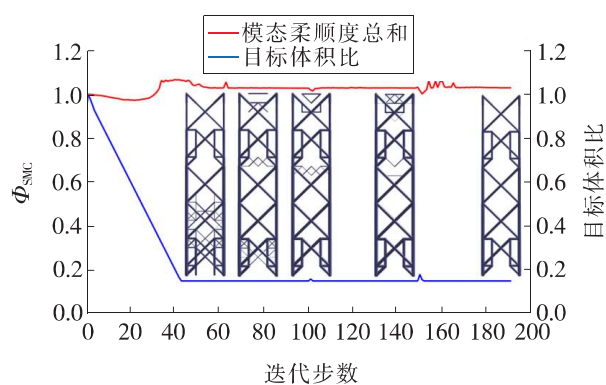


图 5 优化历程曲线及拓扑构型历程

Fig. 5 Optimization course curve and topological configuration course

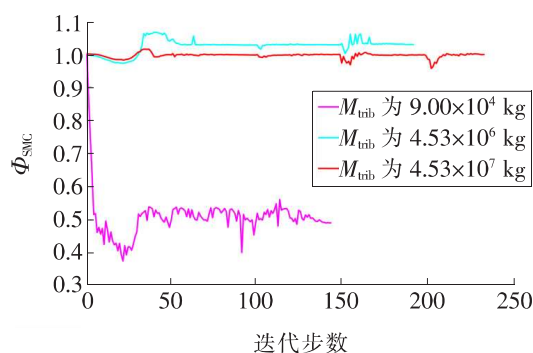


图 6 不同支流质量下优化历程曲线

Fig. 6 Optimization course curve with different tributary masses

6.2 带有分布支流质量的二维框架结构抗震优化设计

图 7(a)所示为带有分布支流质量的二维框架结构初始设计域,尺寸为 $16 \text{ m} \times 80 \text{ m}$ 。图中支流质量沿纵向分布在结构中,每个红色三角形处有相同的支流质量,结构与地面为固定连接。材料的弹性模量 $E = 200 \text{ GPa}$,泊松比 $\mu = 0.3$,密度 $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$,梁单元截面半径 $r = 0.225 \text{ m}$,目标体积与设计域初始体积之比 $V^* = 0.23$,地震设计响应谱的加速度用式(37)计算。

假定红色三角形处的支流质量为 $4.53 \times 10^6 \text{ kg}$,考虑前 14 阶模态响应,采用本研究方法进行结构抗震优化设计,得到的结构模态柔顺度总和、体积比历程曲线及拓扑历程如图 7(b)所示。

图 8(a)~8(c)为图 7(a)中红色三角形处支流质量分别为 9.00×10^4 , 4.53×10^6 , $4.53 \times 10^7 \text{ kg}$ 时,采用本研究获得的二维框架结构抗震优化拓扑。从图 8(a)~8(c)可以看出,支流质量与设计域质量的比例不同,得到的优化结果也不同。

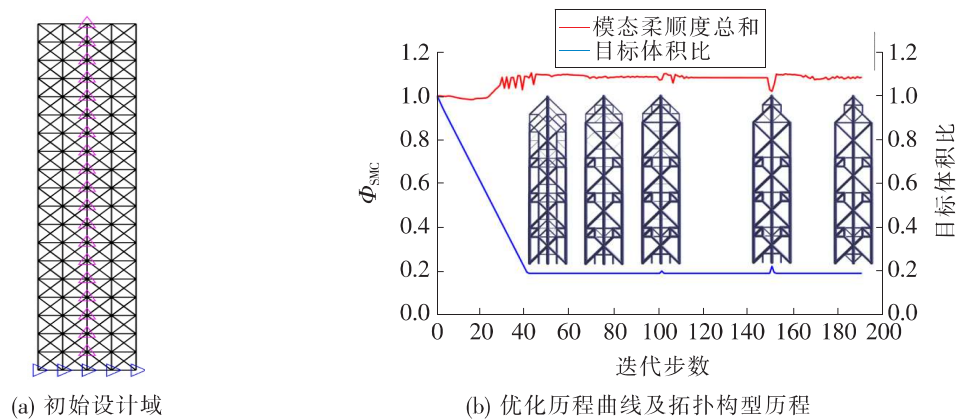


图 7 初始设计域及优化历程

Fig. 7 Initial design domain and optimization course

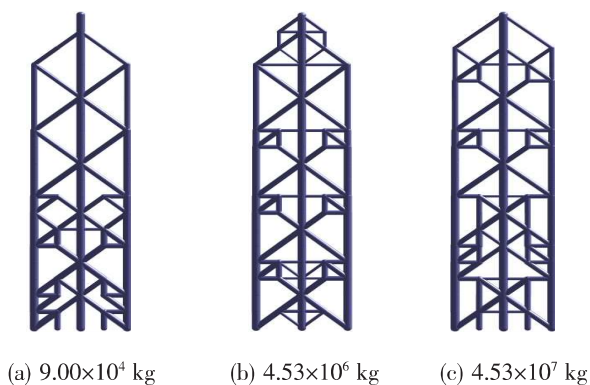


图 8 不同支流质量下的优化拓扑构型

Fig. 8 Optimized topological configurations with different tributary masses

7 结论

本研究基于光滑的 Heaviside 函数建立了设计变量与拓扑变量的映射关系,构建了地震荷载作用下以模态柔顺度总和最小为目标函数、体积为约束条件的框架结构拓扑优化模型;引入改进的 SIMP 多项式刚度矩阵惩罚模型和基于低阶模态能建立的伪模态识别准则和删除措施,并充分考虑了设计域质量对目标函数和等效模态力的影响;使用 MMA 算法解得抗震拓扑结构。通过数值算例可得到以下结论:

1) 本研究采用的惩罚模型和伪模态识别准则及删除措施能有效解决伪模态问题和惯性荷载作用下结构低密度区域的寄生效应问题。

2) 在充分考虑了设计域质量惯性力的影响后,能得到清晰的 0/1 拓扑构型。

3) 支流质量与设计域质量的比例不同,得到的优化结果也不同。

〔参考文献〕

- [1] BENDSØEM P, SIGMUND O. Topology optimization: theory, methods, and applications [M]. Berlin: Springer, 2011.
- [2] CHRISTENSEN P W, KLARBRING A. An introduction to structural optimization [M]. Berlin: Springer, 2008.
- [3] SIGMUND O. Manufacturing tolerant topology optimization [J]. Acta Mechanica Sinica, 2009, 25 (2): 227-239.
- [4] CAVAZZUTI M, BALDINI A, BERTOCCHI E, et al. High performance automotive chassis design: a topology optimization based approach [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2011, 44 (1): 45-56.
- [5] ZHU J H, GUO W J, ZHANG W H, et al. Integrated layout and topology optimization design of multi-frame and multi-component fuselage structure systems [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2017, 56 (1): 21-45.
- [6] DEATON J D, GRANDHI R V. A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: post 2000 [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2014, 49 (1): 1-38.
- [7] ZHU J H, ZHOU H, WANG C, et al. A review of topology optimization for additive manufacturing: status and challenges [J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2021, 34 (1): 91-110.
- [8] BENDSØE M P. Optimal shape design as a material distribution problem [J]. Structural Optimization, 1989, 1 (4): 193-202.
- [9] DU J B, OLHOFF N. Topological design of freely vi-

- brating continuum structures for maximum values of simple and multiple eigenfrequencies and frequency gaps[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2007, 34(2): 91-110.
- [10] NIU B, HE X M, SHAN Y, et al. On objective functions of minimizing the vibration response of continuum structures subjected to external harmonic excitation[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2018, 57(6): 291-2307.
- [11] HAJIRASOULIHA I, PILAKOUTAS K, MOGHADDAM H. Topology optimization for the seismic design of truss-like structures[J]. *Computers & Structures*, 2011, 89(7): 702-711.
- [12] 李栋泓. 非平稳随机地震下桁架结构形状与拓扑优化[D]. 广州: 华南理工大学, 2016: 19-33.
- LI Dong-hong. Shape and topology optimization of truss structures with non-stationary stochastic seismic excitation[D]. Guangzhou: South China University of Technology, 2016: 19-33.
- [13] 白显中. 连续体结构在非平稳随机地震荷载下的拓扑优化研究[D]. 广州: 华南理工大学, 2019: 20-27.
- BAI Xian-zhong. Topology optimization of continuous structures under non-stationary random seismic excitations[D]. Guangzhou: South China University of Technology, 2019: 20-27.
- [14] MARTIN A, DEIERLEIN G G. Structural topology optimization of tall buildings for dynamic seismic excitation using modal decomposition[J]. *Engineering Structures*, 2020, 216: 1107-1124.
- [15] MICHELL A. The limits of economy of material in frame structures[J]. *Philosophical Magazine*, 1904, 8(47): 589-597.
- [16] DORN W S, GOMORY R E, GREENBERG H J. Automatic design of optimal structures[J]. *Journal de Mecanique*, 1964(3): 25-52.
- [17] PEDERSEN N L. Maximization of eigenvalues using topology optimization[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2000, 20(1): 2-11.
- [18] ZHU J H, ZHANG W H, BECKERS P. Integrated layout design of multi-component system[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2009, 78: 631-651.
- [19] GUEST J K, PRÉVOST J H, BELYTSCHKO T. Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, 61(2): 238-254.
- [20] GUEST J K, ASADPOURE A, HA S H. Eliminating beta-continuation from Heaviside projection and density filter algorithms[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2011, 44(4): 443-453.
- [21] CLOUGH R W, PENZIEN J. Dynamics of structures[M]. *Computers & Structures*, 2003: 638-647.
- [22] 荣见华, 彭罗, 易继军, 等. 一种新的多输入多输出柔顺机构拓扑优化方法[J]. *长沙理工大学学报(自然科学版)*, 2021, 18(1): 66-78.
- RONG Jian-hua, PENG Luo, YI Jian-jun, et al. A new topology optimization method for multi-input-multi-output compliant mechanisms[J]. *Journal of Changsha University of Science & Technology (Natural Science)*, 2021, 18(1): 66-78.
- [23] TORTORELLI D A, MICHALERIS P. Design sensitivity analysis: overview and review[J]. *Inverse Problems in Engineering*, 1994, 1(1): 71-105.
- [24] 赵志军, 荣见华, 黄方林, 等. 基于动响应约束的结构材料优化设计[J]. *振动与冲击*, 2017, 36(2): 212-220.
- ZHAO Zhi-jun, RONG Jian-hua, HUANG Fang-lin, et al. Topology optimization of micro structures with random vibration responses constraints[J]. *Vibration and Shock*, 2017, 36(2): 212-220.