

文章编号:1672-9331(2017)03-0029-06

# 几种挡土墙主动土压力理论对比及墙体应力分析

黄 旺, 杨建军, 黄 娟

(长沙理工大学 交通运输工程学院, 湖南 长沙 410004)

**摘 要:** 为了探究当前主要采用的几种土压力理论的差异性,以黏性水平填土为例,对比分析了3种土压力理论的土压力分布及大小变化规律,并采用有限元方法分析了挡土墙截面的应力分布情况。在水平层分析法求解过程中,提出了一种求解最不利破裂角的方法,即采用插值型求导公式求解主动土压力系数 $K$ 取极大值时的 $\theta$ 值。研究结果表明,水平层分析法得到的土压力强度在形态上与实测值更为吻合,同时在一些影响挡土墙稳定性的重要参数上更接近实测值的分析结果,表明水平层分析法计算挡土墙主动土压力具有一定的优越性。

**关键词:** 挡土墙; 主动土压力; 墙体应力; 水平层分析法; 最不利破裂角; 有限元方法

中图分类号: U416

文献标识码: A

## Comparison of several active earth-pressure theories and stress analysis for retaining walls

HUANG Wang, YANG Jian-jun, HUANG Juan

(School of Traffic and Transportation Engineering, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410004, China)

**Abstract:** In order to study the difference of several most commonly used active earth-pressure theories, with horizontal cohesive soil for example, compared and analyzed the distribution and value tendency of earth pressure of these three theories, and analyzed the stress distribution of retaining walls by finite element method. A method is used in solving process for horizontal layer element method, which used interpolation derivation formula to solve the most unfavorable fracture angle  $\theta$ . The results show that the distribution of horizontal layer element method is close to measured value. Meanwhile, some important parameters effect the stability of retaining walls tally with the measured value, which indicate that horizontal layer element method is more practical.

**Key words:** retaining walls; active earth pressure; stress of retaining walls; horizontal layer element method; the most unfavorable fracture angle; finite element method

挡土墙的土压力研究一直是岩土工程的一个  
经久不衰的土力学课题。经典的库仑与朗金土压

力的计算原理简明、适用范围广,故沿用至今。但  
随着技术的发展,研究人员不断发现其分布形式

收稿日期:2017-08-13

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51478053);交通运输部道路结构与材料交通行业重点实验室(长沙)开放基金重点资助项目(KFJ120201)

作者简介:黄 旺(1994-),男,湖南武岗人,长沙理工大学硕士研究生,主要从事工程计算方面的研究。

与工程监测结果相异<sup>[1]</sup>。至此,一些新的求解方法——水平层分析法、极限平衡法等被相继提出。

近年来,一些学者针对墙后土压力的非线性或线性特征,提出了一系列求解墙后土压力的公式。李兴高等<sup>[2]</sup>分析水平层分析法发现,该方法得到的结果在墙的顶部相对经典土压力理论偏大,在底部附近偏小。柯才桐等<sup>[3]</sup>基于库仑理论的平面滑裂假定,应用斜向条分法,推导了考虑多种复杂条件下挡土墙土压力计算式,对经典朗金、库仑土压力理论进行了有效推广。张国祥等<sup>[4]</sup>为求解地震和拟静力条件下的主动土压力问题,将挡土墙计算模型旋转变换转化为静力条件下主动土压力的求解,并采用水平层分析法得到地震条件下主动土压力的强度分布等。陈奕柏等<sup>[5]</sup>将斜向条分法推广到复杂条件下的黏性土地震土压力分布,有效地完善了 Mononobe-Okabe 理论。朱建明等<sup>[6]</sup>将土拱效应考虑到倾斜挡土墙下的土压力计算,得到了土拱效应对主动土压力与被动土压力的影响。刘忠玉等<sup>[7]</sup>考虑水平土层间的剪应力,修正了水平层分析法,得到了主动土压力的分布、合力大小等表达式,对水平层分析法进行了完善。王闰超等<sup>[8]</sup>采用薄层单元法推导了无黏性有限土体主动土压力解析解。张健等<sup>[9]</sup>基于朗金土压力原理和拟静力方法,提出了适用于静力以及地震条件下的土压力计算方法。阮波等<sup>[10]</sup>根据微分单元体的静力平衡分析,推导出了主动土压力的非线性计算表达式,分析了其分布规律及破裂角的求解办法。林智勇等<sup>[11]</sup>综合考虑填土的各类复杂情况,采用薄层单元法导出了适用于黏性土与非黏性土的土压力解析解。以上学者的研究大多基于经典的库仑、朗金土压力以及新近的水平层分析法,对这些理论进行了一定的修正或完善。

在挡土墙的数值模型方面,也有不少学者提出了自己的见解。Mohammad Saeed Ramezani 等<sup>[12]</sup>提出了一种新的数值分析模型,用于估计挡土墙的固有频率,同时还构建了一种具有扭转和平移弹簧的土基模型,用于平动与转动模式下的挡土墙的数值模拟。Babloo Chaudhary 等<sup>[13]</sup>采用有限差分、FLAC 软件分析了动态与静态荷载下的回填加筋土挡土墙,分析了土与墙以及土与钢筋间的相互作用。

比较近几年的挡土墙主动土压力计算理论不

难发现,其主要是以水平层分析法以及经典的库仑、朗金土压力理论为基础,根据具体工程条件对理论进行修正或完善。为此,作者以这三种理论为基础,对比分析计算得到的土压力分布及大小变化规律;同时,为进一步探究土压力对挡土墙内部应力分布的影响,建立了挡土墙的简化模型,并采用有限元方法分析挡土墙截面上的应力分布情况,探究这几种土压力与实测值对挡土墙应力分布影响的差异性,以便更好地判断方法的合理性。

## 1 几种挡土墙主动土压力理论

### 1.1 库仑土压力理论

库仑土压力理论<sup>[14]</sup>假定挡土墙墙后的填土是均匀的砂性土,且滑动土楔为刚体:

$$p_a = \gamma z K_a; \\ K_a = \frac{\cos^2(\varphi - \epsilon)}{\cos^2 \epsilon \cos(\delta + \epsilon) \left[ 1 + \sqrt{\frac{\sin(\delta + \varphi) \sin(\varphi - \beta)}{\cos(\delta + \epsilon) \cos(\epsilon - \beta)}} \right]^2} \quad (1)$$

式中: $\gamma$ 、 $\varphi$  为墙后填土的重度及内摩擦角; $z$  为计算点深度; $\epsilon$  为墙背与竖直线间夹角; $\beta$  为填土与水平面间的倾角; $\delta$  为填土与水平面间的倾角。

### 1.2 朗金土压力理论

朗金土压力<sup>[14]</sup>假定挡土墙墙背直立、光滑,墙后填土表面水平且无限延伸。根据极限平衡理论得到的朗金土压力强度计算公式为:

$$p_a = \gamma z K_a - 2c \sqrt{K_a} \quad (2)$$

式中: $\gamma$  为墙土的重度; $c$ 、 $\varphi$  分别为土的黏聚力和内摩擦角; $z$  为计算点深度; $K_a$  为主动土压力系数,表达式为  $K_a = \tan^2 \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)$ 。

### 1.3 水平层分析法

水平层分析法<sup>[15]</sup>以库仑土压力理论为基础,利用水平层分析对如图 1 所示模型进行求解。

填土为砂土时,挡土墙土压力强度的表达式为:

$$p = \frac{\gamma q_0 H^A}{(H - z)^A} + \frac{\lambda \gamma H}{A + 1} \left[ \left( \frac{1}{1 - b} \right)^A - (1 - b) \right] \quad (3)$$

式中:

$$b = \frac{z}{H};$$

$$\lambda = \frac{\sin(\theta + \alpha) - 2\cos \alpha \sin \theta}{\cos \theta [\sin(\alpha + \delta) - \cos(\alpha + \delta)\tan(\theta + \varphi)];}$$

$$A = 1 - \lambda\beta;$$

$$B = \frac{\cos \theta}{\sin(\theta + \alpha)} \cdot [\sin(\alpha + \delta) + \cos(\alpha + \delta)\tan(\theta + \varphi)].$$

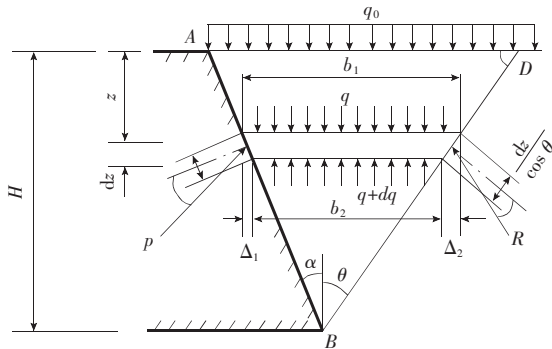


图 1 挡土墙、滑动楔体及水平层单元受力分析

Fig. 1 Force acting on retaining walls, sliding wedges and thin elements

填土为黏土时,根据黏性土凝聚力的等效法则,将黏性土的凝聚力  $c$  除以  $\tan \varphi$ ,作为土的一种内结构压力计算作用在计算土体的四周,从而转化为无黏性土来计算。其主动土压力强度表达式为:

$$p = \frac{\lambda \gamma H}{A + 1} \left[ \left( \frac{1}{1 - b} \right)^A - (1 - b) \right] + \frac{c}{\tan \varphi} \left[ \frac{\lambda}{(1 - b)^A} - \frac{1}{\cos \delta} \right] + q_0 \cdot \frac{\lambda}{(1 - b)^A} \quad (4)$$

式中:

$$b = \frac{z}{H};$$

$$\lambda = \frac{\sin(\theta + \alpha) - 2\cos \alpha \sin \theta}{\cos \theta [\sin(\alpha + \delta) - \cos(\alpha + \delta)\tan(\theta + \varphi)];}$$

$$A = 1 - \lambda\beta;$$

$$B = \frac{\cos \theta}{\sin(\theta + \alpha)} \cdot [\sin(\alpha + \delta) + \cos(\alpha + \delta)\tan(\theta + \varphi)].$$

作用在挡土墙上的总主动土压力  $P$ ,可积分求得:

$$P = \int_0^H p dz = (qH + \frac{1}{2}\lambda H^2)K \quad (5)$$

式中: $q$  为外部荷载;

$$K = \frac{\sin(\theta + \alpha)}{\cos \alpha \cos \theta [\sin(\alpha + \delta) + \cos(\alpha + \delta)\tan(\theta + \varphi)]}.$$

以往水平分析法中最不利破解角的求解方法,一般是通过图解法将角度值变换为线段长度求解,其推导过程冗长且复杂。笔者发现,当  $K$  取得最大值时, $P$  也必然取得最大值,同时最大破裂角的大小仅与  $K$  的表达式有关,故采用插值型求导公式求解  $\frac{dK}{d\theta} = 0$ ,可快速得到最不利破裂角  $\theta$  的值。

这里令  $f(x) = K(\theta)$ ,根据给定区间  $[a, b]$  上的  $(n+1)$  个节点  $x_k$  处的函数值  $f(x_k)$  ( $k=0, 1, \dots, n$ ),建立函数  $f(x)$  的  $n$  次插值多项式  $T_n(x)$ ,通过对多项式求导,得到  $f'(x) \approx T'_n(x)$ 。这里对截断误差不进行讨论。

过 5 个节点  $x_i = x_0 + ih$ , ( $x=0, 1, 2, 3, 4h$  为步长)上的函数值,得到插值多项式为:

$$T_4(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{24h^4} f(x_0) - \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{6h^4} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{4h^4} f(x_2) - \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{6h^4} f(x_3) \quad (6)$$

对式(6)两边求导,可以导出 5 点公式:

$$\begin{cases} f'(x_0) \approx \frac{1}{12h} [-25f(x_0) + 48f(x_1) - 36f(x_2) + 16f(x_3) - 3f(x_4)] \\ f'(x_1) \approx \frac{1}{12h} [-3f(x_0) - 10f(x_1) + 18f(x_2) - 6f(x_3) + f(x_4)] \\ f'(x_2) \approx \frac{1}{12h} [f(x_0) - 8f(x_1) + 8f(x_3) - f(x_4)] \\ f'(x_3) \approx \frac{1}{12h} [-f(x_0) + 6f(x_1) - 18f(x_2) + 10f(x_3) + 3f(x_4)] \\ f'(x_4) \approx \frac{1}{12h} [3f(x_0) - 16f(x_1) + 36f(x_2) - 48f(x_3) + 25f(x_4)] \end{cases} \quad (7)$$

这里采用  $f'(x_2) \approx \frac{1}{12h} [f(x_0) - 8f(x_1) + 8f(x_3) - f(x_4)]$

$8f(x_3) - f(x_4)]$ 进行计算,通过计算机编程求得  $f'(x)=0$  时的  $x$  值。

这样,将  $\alpha, \varphi, \delta$  等已知值代入  $K$  的表达式中,得到  $K$  关于  $\theta$  的函数,通过上述的插值求导公式编程可求得最不利破裂角  $\theta$  的值。

## 2 算例分析

以下算例<sup>[11]</sup>对比分析水平层分析法与经典的库仑解、朗金解以及实测值,并采用有限元方法分析挡土墙的受力特征。四川省建筑科学研究所四川简阳养马河进行了重力式挡土墙试验:墙背竖直,墙高 4 m,土的天然重度为  $\gamma=18.95 \text{ kN/m}^3$ ,内摩擦角  $\varphi=16.6^\circ$ ,土与墙间摩擦角  $\delta=8.3^\circ$ ,黏聚力  $c=4.6 \text{ kPa}$ 。以此为依据,采用经典的库仑土压力与朗金土压力理论以及水平层分析法对挡土墙主动土压力强度进行计算,并与实测值进行比较,结果如图 2 所示。

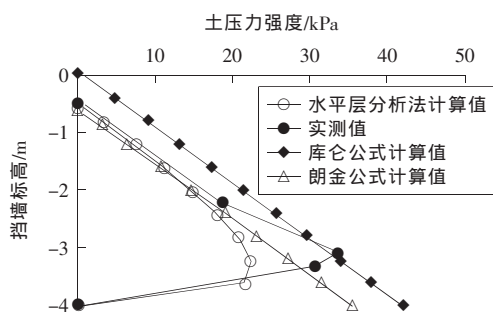


图 2 土压力强度计算值与实测值比较

Fig. 2 Comparison of calculated earth pressure and measured value

由图 2 可知,水平层分析法得到的土压力强度与经典的库仑土压力和朗金土压力比较,其变

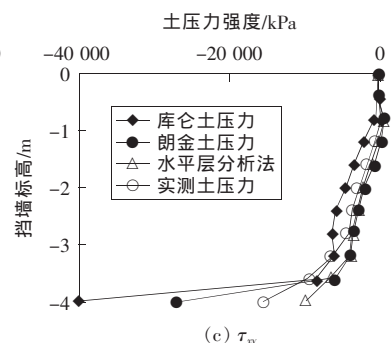
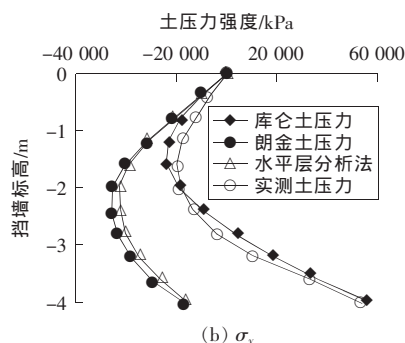
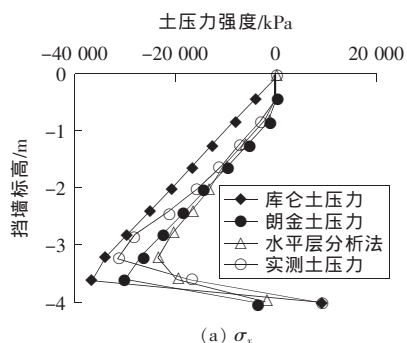


图 4 挡土墙截面应力比较

Fig. 4 Comparison of stress on a section of retaining walls

化趋势与实测值接近,同时土压力强度最大值点位置与实测值较吻合,但小于实测值。朗金土压力与库仑土压力强度均呈线性分布,同时库仑土压力计算值较实测值偏大,这可能与库仑土压力计算过程中忽略了黏聚力有关。水平层分析法得到的土压力强度值较实测值偏小,这里考虑填土性质、挡土墙的位移方式等因素的影响。墙背填土的摩擦角或密实程度对墙后极限平衡区的范围有一定的影响,同时挡土墙的位移也会影响填土中滑裂楔体的形成,进而对土压力强度造成影响。这里,水平层分析法未考虑位移方式对挡土墙土压力强度的影响,可能也是造成其值偏小的原因。

为进一步探究各土压力理论的合理性,现假设有一简化挡土墙(如图 3(a)所示),通过在其上施加各理论所得土压力强度以及实测值,对比分析挡墙的受力特征。挡墙采用 C30 混凝土,弹性模量为 30 GPa,泊松比为 0.17,密度为 2 500 kg/m<sup>3</sup>。采用有限元方法对挡土墙内部的受力情况进行分析,墙体使用 Plane 82 单元,网格采用自由划分(如图 3(b)所示)。

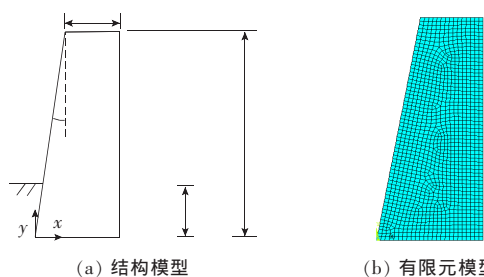


图 3 挡土墙简化模型

Fig. 3 Simplify model of retaining wall

取距竖直墙背 0.1 m 处为计算截面,分析其  $x, y$  方向应力及剪应力,结果见图 4。

从图 4(a)可以看出,朗金土压力与实测值相似,水平层分析法所计算土压力强度作用下的墙体截面上的  $x$  方向应力较其他值偏小;但在截面底部(即墙角处),库仑土压力与实测值的计算结果比较接近,均显示墙脚呈受拉状态。

从图 4(b)可以看出,实测值与库仑土压力作用下的墙体应力相似,呈现出上部受压、下部受拉的应力状态;而朗金土压力与水平层分析法较为相似,墙体截面上呈受压状态。

图 4(c)对比了 4 种情况下墙体截面的剪应力分布。4 种情况下的墙体剪应力形式均一致,水平

层分析法计算得到的最大剪应力与实测值较为接近,但偏小;朗金与库仑土压力作用下的墙体内部的剪应力较实测值偏大。

考虑挡土墙  $y$  方向的应力破坏,另分析墙体截面上  $y$  方向的应力云图(如图 5 所示)可以看出,墙脚为主要的应力集中处,拉应力过大,挡土墙发生倾覆破坏的可能性较大;数值上库仑土压力得到的结果与实测值较接近,但墙角处的应力分布状态水平层分析法与实测值较为接近。

综上分析,采用水平层分析法计算挡土墙主动土压力具有一定的优越性。

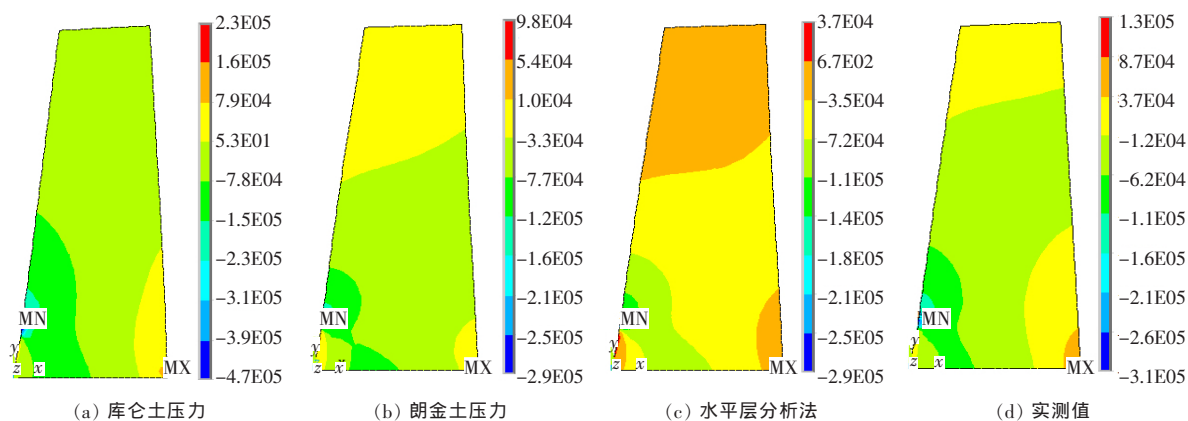


图 5 挡土墙截面  $y$  方向应力云图

Fig. 5 Cloud maps of stress in  $y$  direction on a section of retaining walls

### 3 结论

1) 作者以黏性水平填土为例,对比分析了常用的 3 种土压力分布及大小变化规律,对比墙体  $x, y$  方向上的应力。库仑土压力在整体上与实测值的计算结果比较接近,但在一些影响挡土墙稳定性的重要参数,如:墙角处  $y$  方向应力以及墙体剪应力等,水平层分析法得到的结果与实测值较为吻合。同时,水平层分析法得到的土压力强度在形态上呈非线性分布,土压力合理作用点位置与实测值接近,更加接近真实的土压力分布形态。

2) 在水平层分析法的求解过程中,作者对求解最不利破裂角提出了一点见解,即采用插值型求导公式,避免了繁琐的图解变换或公式推导,直接通过数值方法编写计算机程序得到近似最不利破裂角,提高了求解速度。

3) 水平层分析法得到的土压力强度的最大值

相对于实测值偏小,对此作者根据影响土压力强度的一些因素进行了简要的分析。

本研究对挡土墙设计时土压力强度计算具有一定的参考价值。对于复杂条件下的挡土墙土压力分布,由于实测资料的缺乏,本研究尚未涉及,因此后续有必要对多种复杂条件下的挡土墙应力分布作进一步的研究。

### 〔参考文献〕

- [1] 王渭漳,吴亚中.墙背土压力分布计算的新理论及其工程应用[M].北京:人民交通出版社,1996.  
WANG Wei-zhang, WU Ya-zhong. New theory of earth pressure on retaining walls and its engineering application [M]. Beijing: China Communications Press, 1996.
- [2] 李兴高,刘维宁.关于水平层分析法的讨论[J].岩土力学,2009,30(S2):78-82.  
LI Xing-gao, LIU Wei-ning. Discussion on horizontal

- slice method[J]. Rock and Soil Mechanics, 2009, 30(S2): 78-82.
- [3] 柯才桐, 陈奕柏, 朱嘉. 挡土墙土压力线性分布解[J]. 岩石力学与工程学报, 2014, 33(S1): 3312-3317.  
KE Cai-tong, CHEN Yi-bo, ZHU Jia. A linear distribution solution of earth pressure on retaining wall[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2014, 33(S1): 3312-3317.
- [4] 张国祥. 地震条件下挡土墙主动土压力及其分布的新分析法[J]. 岩土力学, 2014, 35(2): 334-338, 345.  
ZHANG Guo-xiang. New analysis method of seismic active earth pressure and its distribution on a retaining wall[J]. Rock and Soil Mechanics, 2014, 35(2): 334-338, 345.
- [5] 陈奕柏, 谢洪波, 柯才桐, 等. 地震条件下黏性土挡土墙土压力分析[J]. 岩土力学, 2014, 35(12): 3396-3402.  
CHEN Yi-bai, XIE Hong-bo, KE Cai-tong, et al. Analysis of earth pressure of cohesive soil behind a retaining wall under seismic condition[J]. Rock and Soil Mechanics, 2014, 35(12): 3396-3402.
- [6] 朱建明, 赵琦. 考虑土拱效应的挡土墙主动土压力与被动土压力统一解[J]. 岩土力学, 2014, 35(9): 2501-2506.  
ZHU Jian-ming, ZHAO Qi. Unified solution to active earth pressure and passive earth pressure on retaining wall considering soil arching effects[J]. Rock and Soil Mechanics, 2014, 35(9): 2501-2506.
- [7] 刘忠玉, 陈捷, 李东阳. 考虑剪应力作用的刚性挡土墙主动土压力分析[J]. 岩土力学, 2016, 37(9): 2443-2450.  
LIU Zhong-yu, CHEN Jie, LI Dong-yang. Calculation of active earth pressure against rigid retaining wall considering shear stress[J]. Rock and Soil Mechanics, 2016, 37(9): 2443-2450.
- [8] 王闰超, 晏鄂川, 陆文博, 等. 无黏性有限土体主动土压力解析解[J]. 岩土力学, 2016, 37(9): 2513-2520.  
WANG Yan-chao, YAN E-chuan, LU Wen-bo, et al. Analytical solution of active earth pressure for limited cohesionless soils[J]. Rock and Soil Mechanics, 2016, 37(9): 2513-2520.
- [9] 张健, 王新征, 胡瑞林. 地震作用下挡土墙主动土压力计算方法[J]. 岩石力学与工程学报, 2017(4): 1005-1011.  
ZHANG Jian, WANG Xin-zheng, HU Rui-lin. Analysis of seismic active earth pressure on retaining wall[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2017(4): 1005-1011.
- [10] 阮波, 冷伍明, 李亮. 土压力非线性分布的研究[J]. 长沙铁道学院学报, 2001(4): 73-76.  
RUAN Bo, LENG Wu-ming, LI Liang. Study on non-linear distribution of active earth pressure[J]. Journal of Railway Science and Engineering, 2001(4): 73-76.
- [11] 林智勇, 戴自航, 苏美选. 复杂条件下挡土墙主动土压力解析解[J]. 岩土工程学报, 2008(4): 555-559.  
LIN Zhi-yong, DAI Zi-hang, SU Mei-xuan. Analytical solution of active earth pressure acting on retaining walls under complicated conditions[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2008(4): 555-559.
- [12] Ramezani M S, Ghanbari A, Hosseini S A A. New mathematical model for computing natural frequencies of retaining walls considering soil-structure interaction[J]. Applied Mathematical Modelling, 2017(45): 179-191.
- [13] Chaudhary B, Hazarika H, Krishan A M. Effect of backfill reinforcement on retaining wall under dynamic loading: geotechnical hazards from large earthquakes and heavy rainfalls[M]. Japan: Springer, 2017: 535-544.
- [14] 袁聚云, 钱建固, 张宏鸣, 等. 土质学与土力学[M]. 北京: 人民交通出版社, 2009.  
YUAN Ju-yun, QIAN Jian-gu, ZHANG Hong-ming, et al. Soil science and soil mechanics[M]. Beijing: China Communications Press, 2009.
- [15] 顾慰慈. 挡土墙土压力计算手册[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2005.  
GU Wei-ci. Calculation manual of earth pressure on retaining walls[M]. Beijing: China Building Materials Industry Press, 2005.