

文章编号:1672-9331(2017)02-0033-08

高速公路主线的鲁棒限速控制

王正武, 郭允昌

(长沙理工大学 交通运输工程学院, 湖南 长沙 410004)

摘要: 将高速公路限速系统视为一个不确定性系统, 该系统应当具备一定的鲁棒性与鲁棒稳定性, 即对其每一个对象都可以保证其反馈系统的内稳定。为了增强高速公路限速系统的鲁棒性与鲁棒稳定性, 运用基于宏观交通流模型建立非线性状态方程的方法, 使模型在一定扰动的前提下保持稳定。采取以下几个步骤进行分析和运算: ①从整个不确定性仿射非线性系统出发, 寻找它的公称状态空间模型; ②应用状态反馈线性化方法, 把公称的仿射非线性系统严密线性化; ③通过考虑仿射非线性系统的不确定性, 使得反馈线性化系统可以用加法不确定性线性系统或乘法不确定性系统来描述; ④针对反馈线性化系统, 用 $D-K$ 迭代法或 $\mu-K$ 迭代法进行线性鲁棒控制器设计; ⑤把线性鲁棒控制器回代到仿射非线性系统中, 从而得到非线性鲁棒控制器。进而将这种方法运用在实际算例中, 检验了该方法的实用性与可靠性。

关键词: 高速公路主线; 非线性系统; 宏观交通流模型; 可变限速; 鲁棒控制方法

中图分类号: U491

文献标识码: A

Robust speed limit control of freeway

WANG Zheng-wu, GUO Yun-chang

(School of Traffic and Transportation Engineering, Changsha University
of Science and Technology, Changsha 410004, China)

Abstract: As a kind of uncertain system, the speed limit system should be robust and robust steady, which means the internal stability of each system can be guaranteed. Aiming at this problem, by using the methods of macroscopic traffic flow model is established based on nonlinear state equation, the model is stable in the case of a certain disturbance. The following steps of analysis and calculation are taken: ①Based on the uncertain affine nonlinear system, the nominal state space model is searched; ②Application of state feedback linearization method, the nonlinear system of strict linear nominal; ③ by considering affine nonlinear systems with uncertainties, the feedback linearization system can use the addition of linear uncertain systems or multiplicative uncertainty to describe system; ④According to the feedback linearization system, design of linear robust controller using $D-K$ iterative method or $\mu-K$ iterative method; ⑤the linear robust controller back to affine nonlinear system, so as to obtain the nonlinear robust controller.

Key words: freeway mainline; nonlinear system; macroscopic traffic flow model; variable speed limit; robust control method

收稿日期: 2017-03-10

基金项目: 国家自然科学基金项目资助(51678075)

作者简介: 王正武(1973-), 男, 湖南宁乡人, 长沙理工大学教授, 博士, 主要从事道路交通管理规划以及交通信号控制等方面的研究。

高速公路是连接城市与城市、城市与地区的纽带,是交通的大动脉之一,对城乡经济的发展起着非常重要的作用^[1]。近几年汽车保有量的急剧增加,导致交通需求快速增长。而日益增长的交通需求,又导致高速公路上周期性的、非周期性的交通阻塞日趋增多,而交通事件的发生使得交通阻塞进一步加剧^[2]。出于对改善高速公路交通堵塞现状的考虑,经典的控制系统设计方法要求有一个确定的数学模型,在名义系统上进行分析和设计,然后考虑模型的误差,用仿真的方法来检验实际系统的性能。虽然限制车速是最有效安全的措施之一^[3],但在一定的特殊条件(外界因素变动等)干扰下其稳定性不佳。

近年来,很多学者致力于研究智能算法在交通领域的应用,并将其应用于高速公路的可变限速研究中。目前,国内外使用较多的智能算法有神经网络、模糊控制等^[4-8]。智能算法区别于经典算法,其优点在于在一定程度上改善了系统在非线性和外部因素干扰下的稳定程度,但也存在一定的弊端,即在计算方面提取困难,且算法复杂,不能保证在外部因素较为多变的情况下的鲁棒稳定程度。

基于此,作者采用基于宏观交通流的鲁棒控制算法。鲁棒控制的概念自1972年加拿大多伦多大学 Davison 首次提出至今,已被广泛运用于多个工业科学领域中^[5-8]。在高速公路的优化控制方面,鲁棒控制的方法也得到了许多运用,在匝道控制、主线与匝道融合协调控制等发面都有所涉及^[9]。鲁棒控制方法的要点及原理是保证系统的鲁棒稳定性,即设计一个控制器 C ,使集合 p 中的每一个对象都能保证反馈系统的内稳定(对于基本反馈回路,当回路内所有传递函数均稳定时,系统为内稳定)^[10]。本研究将讨论在高速公路主线存在诸多外界不确定性因素干扰的情况下,建立非线性状态反馈方程,利用非线性系统的严密反馈线性化方法,将状态反馈非线性系统严密线性化并进行线性鲁棒控制器设计,之后将其回代到仿射非线性系统中,进而得到非线性控制器,以取得最佳控制效果。

1 限速状态下交通流模型的构建

对于近似线性系统,如果状态反馈 H_∞ 控制

问题是可解的,那么对于原来的非线性系统,状态反馈非线性 H_∞ 控制问题也是可解的。在高速公路主线限速控制系统中,需得到一个类似于非线性系统:

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)w + g_2(x)u;$$

$$z = h_1(x) + j_{12}(x)u。$$

式中: $x \in R^n$ 是状态向量; $w \in R^{m^2}$ 为控制输入; $z \in R^{p^1}$ 是评价输出; f, h_1 和 $g_i (i=1,2)$ 是充分光滑的已知函数, $f(0)=0, h_1(0)=0$ 。

如果要该非线性系统 H_∞ 控制问题有解,只需将其线性化并得到控制器 C ,之后将其回代求解。

1) 模型假设。

根据 Kotsialose 等建立的宏观交通流模型,可将整条高速公路划分为若干边,而每一边作为研究的一个单位。其划分依据是,每一边最多包含一个入口匝道或出口匝道。再将每一边划分为若干段,每一段取长约 100 m。边、段分别用 m, i 表示。

一般宏观交通流模型表示为:

$$q_{m,i}(k) = \rho_{m,i}(k) v_{m,i}(k) \lambda_m。 \quad (1)$$

$$\rho_{m,i}(k+1) = \rho_{m,i}(k) + \Delta_{m,i}(k)。 \quad (2)$$

$$v_{m,i}(k+1) = v_{m,i}(k) + \phi_{m,i}(k) + \phi_{m,i}(k) + \varphi_{m,i}(k)。 \quad (3)$$

$$\Delta_{m,i}(k) = q_{m,i-1}(k) - q_{m,i}(k) + r_{m,i}(k) - c_{m,i}(k)。 \quad (4)$$

式中: q, v, ρ 分别表示流量、速度与密度;

2) 模型参数。

参数为:

$$\phi_{m,i}(k) = \frac{T}{L_m} v_{m,i}(k) [v_{m,i-1}(k) - v_{m,i}(k)]。 \quad (5)$$

$$\psi_{m,i}(k) = \frac{T}{\tau} \{V[\rho_{m,i}(k)] - v_{m,i}(k)\}。 \quad (6)$$

$$\varphi_{m,i}(k) = -\frac{T\eta}{\tau} \frac{\rho_{m,i+1}(k) - \rho_{m,i}(k)}{\rho_{m,i}(k) + \kappa}。 \quad (7)$$

$$V[\rho_{m,i}(k)] =$$

$$V^1(k) = v_{free,m} e^{\left[-\frac{1}{a_m} \left(\frac{\rho_{m,i}(k)}{\rho_{crit,m}}\right)\right]^{a_m}}。 \quad (8)$$

式中: N_c 为控制步长; N_p 为预测步长; T 为仿真时间步长。

由此导出边 m 的入口排队长度模型为:

$$w_m(k+1) =$$

$$\omega_m(k) + T[d_m(k) - q_m(k)]. \quad (9)$$

以及 m 边车流量为:

$$q_m(k) = \min[d_m(k) + \frac{\omega_m(k)}{T}, Q_m \frac{\rho_{\max} - \rho_{\mu,1}(k)}{\rho_{\max} - \rho_{\text{crit},\mu}}]. \quad (10)$$

式中: $\omega_m(k)$, $d_m(k)$, $q_m(k)$ 分别表示边 m 的排队长度、需求及流出量; Q_m , ρ_{\max} , $(\mu, 1)$ 分别表示匝道容量, 最大密度以及连接 μ 边的第一段。

以上是理想条件下的宏观交通流模型。由于主线限速, 因此还需构建以下限速条件下的交通流模型:

$$V[\rho_{m,i}(k)] = \min[(1 + \alpha)v_{\text{ctrl},m,i}(k), V^1(k)]. \quad (11)$$

式中: α 为限速服从率; $v_{\text{ctrl},m,i}$ 为 m 边 i 段的限速值。

对于主线入口:

$$q_0(k) = \min[d_0(k) + \frac{\omega_0(k)}{T}, q_{\text{lim},u,l}]. \quad (12)$$

若 $v_{\text{lim},1,1}(k) < V^{-1}(\rho_{\text{crit},u})$, 则 $q_{\text{lim},u,1} = \lambda_u \cdot$

$$v_{\text{lim},u,1}(k) \rho_{\text{crit},u} \left[-a_u \ln \left(\frac{v_{\text{lim},u,1}(k)}{v_{\text{free},u}} \right) \right]^{\frac{1}{a_u}}, \text{ 否则}$$

$$q_{\text{cap},u} = \lambda_u V(\rho_{\text{crit},u}) \rho_{\text{crit},u}, v_{\text{lim},u,1}(k) = \min[v_{\text{crit},u,1}, v_{u,1}(k)], q_{\text{lim},u,1} = q_{\text{cap},u}.$$

匝道入口处为式(10)。

下游灵敏度系数 η 可通过以下方法确定: 若 $\rho_{m,i+1}(k) \geq \rho_{m,i}(k)$, 则 $\eta_{m,i}(k) = \eta_{\text{high}}$; 否则, $\eta_{m,i}(k) = \eta_{\text{low}}$ 。

据此可以对式(3)进行替换:

$$\varphi_{m,i}(k) = -\frac{T \eta_{m,i}(k) \rho_{m,i+1}(k) - \rho_{m,i}(k)}{L_{m^*} \rho_{m,i}(k) + \kappa}. \quad (13)$$

由此可得到限速条件下的交通流模型。

2 非线性状态方程的构建

当以第 m 边为分析单位时, 令

$$X^T(k) = \{[\rho_1(k), v_1(k)], [\rho_2(k), v_2(k)], \dots, [\rho_n(k), v_n(k)]\} \in R^{2n+1}. \quad (14)$$

$$U(k) =$$

$$[r_1(k), r_2(k), \dots, r_n(k)] \in R^{2n+1}. \quad (15)$$

式中: $X(k)$ 与 $U(k)$ 分别为状态方程的状态变量与控制向量; $r_n(k)$ 表示 k 时刻第 n 边的控制速度。

式(14)即表示某时刻:

$$X(k+1) = \mathbf{A}X(k) + F[K(X)] + (\mathbf{B} + \Delta\mathbf{B})U(k) + \{G[X(k)] + \Delta G[X(k)]\}M(\omega). \quad (16)$$

式中: $\omega \in [\Delta_1(k), \Delta_2(k), \dots, \Delta_n(k)]$, 表示发生的扰动导致的 ρ, v 变化。

$$F^T[X(k)] = \{f_1[X(k)], f_2[X(k)], \dots, f_{2n+1}[X(k)]\} \in R^{2n+1}.$$

式(16)右边的 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \Delta\mathbf{B}$ 均为 $(2n+1)$ 阶矩阵。

\mathbf{A} 中, $a_{jj} = 1 (j = 2K+1, n \geq K \geq 0)$; $a_{jj} = 1 - \frac{T}{f} (j = 2K, n \geq K \geq 1)$, 其余元素为 0。

\mathbf{B} 中, 对角元素 $b_{11} = \frac{T}{L_1 \lambda_1}$, $b_{(2n+1)(2n+1)} = -T$, 其对角元素为 1; 非对角元素为 0。

$\Delta\mathbf{B}$ 中, $\Delta b_{11} = \frac{T}{L_1 \lambda_1} \Delta_1$, 其余元素为 0。

G 中, $g_{11} = \frac{T}{L_1}$, $g_{jj} = \frac{T \lambda_{j-1}}{L_j \lambda_j} (j = 2K+1, n > K \geq 1)$, $g_{jj} = \frac{T}{f} (j = 2K, n \geq K \geq 1)$, $g_{(2n+1)(2n+1)} = T$, 其余元素为 0。

ΔG 中, $\Delta g_{11} = \frac{T}{L_1} \Delta_1$, $\Delta g_{jj} = \frac{T \lambda_{j-1}}{L_j \lambda_j} \Delta_j (j = 2K+1, N > K \geq 1)$ 。

在高速公路限速控制中, 控制方法应该是通过控制车速来达到总出行时间最小的目的, 即使使控制目标 $J = T \sum_{k=Mk_c}^{M(k_c+k_p)-1} \left\{ \sum_{j \in I_{\text{seg}}} T \rho_j(k) v_j(k) L_j \lambda_j \right\}$ 数值达到最小。其中, 车道长度 L 与车道数 λ 为预先设定好的固定值, 车流密度 ρ 与车速 v 则为状态方程中的状态变量。

3 非线性状态反馈 H_∞ 限速控制模型

1) 公称模型的确立。

这里考虑参数不确定性仿射非线性系统:

$$\dot{x} = f(p, x) + g(p, x)u.$$

$$y = h(p, x)。$$

式中: p 为物理参数, 可表示为 $p = p_0 + S_p \delta_p$, p_0 为公称值; S_p 为不确定性的加权; δ_p 为规范化的不确定性。

公称值存在的意义在于, 由于大部分工程中状态变量是具有不可控制、可以通过检测手段检测出来、在一定微小幅度内不断变化的微弱变化量, 如: 在磁力悬浮系统的控制中, 柔性臂在自身重力等作用下与标准弯曲偏移量有着微小的不同, 此时则需选取公称值来固定这一微小变化量, 从而避免在后续计算中产生误差。

在高速公路系统中, 其状态变量 $X(k)$ 具体数值可以通过技术手段直接测得, 且不存在于此之外的微小误差, 固其工程模型即为式(16)本身。

2) 非线性系统的严密反馈线性化。

将式(16)进行变形, 得到:

$$\begin{aligned} X(k+1) = & \mathbf{A}X(k) + F[X(k)] + \\ & \mathbf{B}U(k) + \Delta \mathbf{B}U(k) + G[X(k)]M(w) + \\ & \Delta G[X(k)]M(w)。 \end{aligned} \quad (17)$$

令

$$\begin{aligned} N(X, U) = & F[X(k)] + \Delta \mathbf{B}U(k), \\ L[X(k), w] = & \{G[X(k)] + \Delta G[X(k)]\}M(w)。 \end{aligned}$$

则式(17)可变形为:

$$\begin{aligned} X(k+1) = & \mathbf{A}X(k) + \mathbf{B}U(k) + N[X(k), \\ & U(k)] + L[X(k), w]。 \end{aligned} \quad (18)$$

该系统由三个部分构成: 线性项 $\mathbf{A}X(k) + \mathbf{B}U(k)$ 、非线性项 $N[X(k), U(k)]$ 以及不确定项 $L[X(k), w]$ 。

仿照上文提出的非线性系统:

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)w + g_2(x)u。 \quad (19)$$

其线性项 $\mathbf{A}X(k) + \mathbf{B}U(k)$ 、非线性项 $N[X(k), U(k)]$ 、不确定项 $L[X(k), w]$ 分别与 $f(x)$, $g_2(x)u$, $g_1(x)w$ 相对应。

状态反馈非线性 H_∞ 控制问题: 对于该非线性系统和给定的正常数 γ , 寻找使闭环控制系统:

$$\dot{x} = f(x) + g_2(x)k(x)。 \quad (20)$$

渐进稳定, 而且满足 $\|S_{zw}\|_{L_2} < \gamma$ 的状态反馈规律 $k(x)$ 。

在高速公路系统中, 要使式(16)的闭环系统

S_{zw} 在 ∞ 范数上小于给定值 γ , L_2^C 应当趋近于 ∞ 。

在求解标准 H_∞ 控制问题时, 常常不是直接解决 $\|H\|_\infty$ 极小化问题, 而是首先寻找次优的 H_∞ 控制器, 使其能镇定闭环系统且 $\|H\|_\infty \leq \gamma$, 然后通过迭代计算求得最优控制器。

为使状态反馈控制率 $k(x)$ 满足上述条件, 可引入新的输入向量:

$$u = \text{col}(v_1, v_2, \dots, v_m)。 \quad (21)$$

以及状态变量:

$$\xi = \text{col}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)。 \quad (22)$$

通过非线性状态反馈:

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v。 \quad (23)$$

式中:

$$\begin{aligned} \alpha(x) = & \begin{bmatrix} \alpha_1(x) \\ \alpha_2(x) \\ \vdots \\ \alpha_m(x) \end{bmatrix}; \\ \beta(x) = & \begin{bmatrix} \beta_{11}(x) & \beta_{12}(x) & \cdots & \beta_{1m}(x) \\ \beta_{21}(x) & \beta_{22}(x) & \cdots & \beta_{2m}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1}(x) & \beta_{m2}(x) & \cdots & \beta_{mm}(x) \end{bmatrix}。 \end{aligned}$$

以及状态坐标变换:

$$\xi = \varphi(x)。 \quad (24)$$

可以把非线性系统(18)转换成线性系统:

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}_1 w + \mathbf{B}_2 u。 \quad (25)$$

对于近似线性系统, 如果状态反馈 H_∞ 控制问题是可解的, 那么对于原来的非线性系统, 状态反馈非线性 H_∞ 控制问题也是可解的。针对式(18)这一非线性方程, 为了使其达到线性化的目的, 需找到下述平衡点:

$$0 = \mathbf{A}X(k) + \mathbf{B}U(k) + N[X(k), U(k)]。 \quad (26)$$

在这个平衡点附近对式(18)进行泰勒级数展开, 忽略 2 次以上的项, 进行简化后可得 2 次项与 1 次项之间的近似关系式, 从而得到线性关系式:

$$\dot{x}_g = \mathbf{A}_g x_g + \mathbf{B}_g u_g。 \quad (27)$$

式中: $\mathbf{A}_g, \mathbf{B}_g$ 分别为矩阵 \mathbf{A}, \mathbf{B} 经过泰勒级数展开后的变型矩阵, 将 $\mathbf{A}_g, \mathbf{B}_g$ 的数据代入后可得到系统的传递函数:

$$P(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_g)^{-1} \mathbf{B}_g。 \quad (28)$$

3) 不确定性系统描述。

将高速公路系统视为具有乘法不确定性系统,其开环传递函数为:

$$L(s) = P(s)K(s). \quad (29)$$

式中: $K(s)$ 为控制器。

其灵敏度与补灵敏度函数分别为:

$$S(s) = [\mathbf{I} + L(s)]^{-1}. \quad (30)$$

$$T(s) = L(s)[\mathbf{I} + L(s)]^{-1}. \quad (31)$$

灵敏度函数是控制对象 $P(s)$ 的相对变化与输入输出闭环传递函数的相对变化之比,因此在使灵敏度函数 $S(s)$ 小的频率范围内选择大增益加权函数 $W_s(s)$:

$$\|W_s(s)S(s)\|_{\infty} < 1. \quad (32)$$

式中: $W_s(s)$ 是稳定的有理标量函数。

由于被忽略的非线性因素导致作为设计模型的传递函数 $P(s)$ 具有不确定性,所以必须考虑不确定性的控制对象:

$$\tilde{P}(s) = [\mathbf{I} + W_\gamma(s)\Delta(s)]P(s). \quad (33)$$

式中: $W_\gamma(s)$ 表示乘法不确定性大小的标量频率加权函数; $\Delta(s)$ 是稳定的,而且满足 $\|\Delta(s)\| \leq 1$ 。

对于由式(33)中所表示的 $P(s)$, 控制器 $K(s)$ 使闭环系统稳定的条件是:

$$\|W_\gamma(s)T(s)\|_{\infty} < 1. \quad (34)$$

这也是保证闭环鲁棒稳定性的条件。由此可知,灵敏度函数与补灵敏度函数都需要尽可能的小。但是,灵敏度函数与补灵敏度函数存在以下关系:

$$S(s) + T(s) = 1. \quad (35)$$

所以,选择适当的频率加权函数 $W_s(s)$ 的值是非常必要的,它可以保证灵敏度函数与补灵敏度函数都尽可能的小。

综上所述,式(24)与式(26)可归纳为:

$$\left\| \begin{bmatrix} W_s(s) & S(s) \\ W_T(s) & T(s) \end{bmatrix} \right\| < 1. \quad (36)$$

由此可以得出,在控制器 $K(s)$ 稳定化 G 的过程中, $G(s)$ 与 W_s, W_T 的关系式为:

$$G(s) = \begin{bmatrix} W_s & -W_s P \\ 0 & W_T P \\ \mathbf{I} & -P \end{bmatrix}. \quad (37)$$

因此,该问题转变为寻找控制器 K , 使式(37)所示闭环系统内部稳定,且

$$\|F_1(G, K)\|_{\infty} < 1. \quad (38)$$

这是一个标准的 H_{∞} 控制问题,通过求解可得控制器 K 。

在确定灵敏度函数与补灵敏度函数时,首先,把灵敏度函数 $S(s)$ 的加权函数 $W_s(s)$ 选择为一阶的有理函数:

$$W_s(s) = \gamma_s \tilde{W}_s(s), \quad \tilde{W}_s(s) = \frac{k_s}{1 + \frac{s}{2\pi f_s}}. \quad (39)$$

式(37)中,参数 k_s 和 f_s 的选择,应当使加权函数 $W_s(s)$ 在波动较小时具有比较大的增益,而波动较大时具有较小的增益;参数 γ_s 是一个用于调节加权函数增益的设计参数; γ_s 的数值越大,那么控制性能越好。但是,受到式(36)与式(39)的制约,其数值应当有一个最大值,否则不存在满足式(36)的控制器。

其次,对于补灵敏度函数与其加权函数,应当选择为一个三阶的多项式:

$$W_T(s) =$$

$$k_T \left(1 + \frac{s}{2\pi f_{T1}}\right) \left(1 + \frac{s}{2\pi f_{T2}}\right) \left(1 + \frac{s}{2\pi f_{T3}}\right). \quad (40)$$

这样选择是因为在对式(18)展开时忽略了2次以上的项,使得传递函数 $P(s)$ 的分子分母阶数之差为3。这样选择后,可以使 $W_T(s)T(s)$ 的分子分母具有相同阶数。同样,参数 $k_T, f_{T1}, f_{T2}, f_{T3}$ 的选择也应使 $W_T(s)$ 在波动较大时具有较大增益,在波动较小时具有较小增益。

4) 线性系统状态反馈控制率 $k(s)$ 的求解。

对于鲁棒控制器的 μ 综合方法的求解可分为如下两类。

① 针对加法不确定性来描述不确定非线性系统,经过线性化后,其闭环传递函数矩阵为:

$$T_{yv}(s) =$$

$$\{P(s) + W(s)\Delta(s) : \|\Delta(s)\|_{\infty} < 1\}. \quad (41)$$

式中:公称非线性系统经反馈线性化后的传递函数矩阵为:

$$P(s) = C(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}. \quad (42)$$

② 针对乘法不确定性模型:

$$T_{yv}(s) =$$

$$\{[\mathbf{I} + W(s)\Delta(s)]P(s) : \|\Delta(s)\|_{\infty} < 1\}. \quad (43)$$

$$P_A(s) = [\mathbf{I} + \Delta(s)W(s)]P(s). \quad (44)$$

以上称为 μ 综合问题,其求解方法可分为 $D-K$ 迭代法与 $\mu-K$ 迭代法两类。现以 $D-K$ 迭代法对上述问题进行求解。

假设存在具有不稳定性摄动的线性反馈控制系统(即通过严密反馈线性化之后所得的线性系统),其中 $G(s)$ (即本文所处理的 $\dot{x} = Ax + B_1w + B_2\mu$)是稳定的实有理传递函数矩阵, Δ (即 $B_1\tau w$)是一个结构不确定性。此类问题可通过选择一个标度矩阵 D 来进行计算。

对于一个固定的标度矩阵 D ,则

$$\min_{K \text{ 稳定化 } G} \|DF_1(G, K)D^{-1}\|_{\infty} \quad (45)$$

是一个标准的 H_{∞} 控制问题。

对于一个固定的控制器 K ,则

$$\inf_{D \in D} \|DF_1(G, K)D^{-1}\|_{\infty} \quad (46)$$

是一个关于 D 的凸优化问题。

$D-K$ 迭代法的步骤如下。

①选择初始标度矩阵 $D(s)$,为方便代数运算,可将 $D(s)$ 选择为标准矩阵 I 。

②固定 $D(s)$,求式(45)的 H_{∞} 控制问题,获得 $K(s)$ 。

③固定 $K(s)$,求式(46)的凸优化问题,获得标度矩阵 $\tilde{D}(s)$ 。

④比较 $D(s)$ 与 $\tilde{D}(s)$,若二者接近,则由式(2)获得的控制器 $K(s)$ 为最优控制器;否则,令 $D(s) = \tilde{D}(s)$,返回到②。

应用 $D-K$ 迭代法虽然不能保证获得全局的最优解,但是它的有效性已从许多实际经验中得到确认。

下面举例分析 $D-K$ 迭代法的具体运算流程及其有效性。

对于具有乘法不确定性的控制对象,即实际控制对象的传递函数矩阵为:

$$P_A(s) = [I + \Delta(s)W(s)]P(s). \quad (47)$$

采用反馈控制器 K ,并对控制对象输入侧的灵敏度函数矩阵做性能方面的要求,构成闭环控制系统,具体性能要求假设已知。

①选择初始的标度矩阵 $D(s) = I$,求解满足

$$\|F_1(G, K)\|_{\infty} > 1 \quad (48)$$

的控制器和最小的 γ ,记为 K_0 和 γ_0 。

②求出满足

$$\inf_{D \in D} \|DF_1(G, K_0)D^{-1}\|_{\infty} < 1 \quad (49)$$

的标度矩阵 $D(s)$,这时的 $D(s)$ 记为 $D_1(s)$ 。

③求出满足

$$\|D_1F_1(G, K)D_1^{-1}\|_{\infty} < 1 \quad (50)$$

的 H_{∞} 控制器 K 和最小的 γ ,记为 K_1 和 γ_1 。

这时,所求目标控制器 K_1 与第一步所求得的 K_0 相比,具有更好的灵敏度。重复步骤,当所求得的 K_n 使得 $D_n(s)$ 与标度矩阵 $D(s)$ 最为接近时,即获得目标控制器 K 。

5) 回待步骤。

由于非线性系统经过泰勒级数展开后得到的线性系统忽略了其非线性因素,因而在上述控制器 K 的确定步骤中引入了灵敏度函数 $S(s)$ 、补灵敏度函数 $T(s)$ 以及标量频率加权函数 $W_{\gamma}(s)$ 。只要这三个参数进行充分迭代运算并取值适当,那么所求得的线性系统控制器 $\tilde{K}(s)$ 与目标控制器 $K(s)$ 是极为相近的,可以直接回代使用。

4 算例研究

假设有一条 4 段 3 车道的高速公路,每段 100 m,段 1 连接入口匝道,段 4 连接出口匝道,存在稳定交通流。现由于某种原因,使在初始时刻 t_0 段 3 车道封闭 9T 时长。设定常参数 $f = 50$, $Z = 1$, $\kappa = 10$, $a_j = 1.5$,自由流速度为 40 m/s,阻塞密度为 0.4 辆/m,入口匝道需求为 0.018 辆/s,出口流量占主线 15%,主线入口密度为 0.018 辆/车道,速度为 22.43 m/s。主线初始时刻 t_0 各段速度与密度如表 1 所示。

表 1 初始时刻速度与密度

Table 1 Initial velocity and density

	初始速度/(m · s ⁻¹)	初始密度/(辆 · s ⁻¹ · 车道 ⁻¹)
段 1	19.334 5	0.017 5
段 2	19.334 5	0.017 5
段 3	19.334 5	0.017 5
段 4	20.473 5	0.016 5

采用本研究所讨论的非线性鲁棒控制方法,通过初始时刻参数与扰动参数的输入分析,利用

控制设计系统软件,通过重复改变灵敏度函数的设计参数 γ_s ,最终确定 γ_s 的最大值为 23.8。若大于这个值,则无法得到所需求的控制器。由此推算得到灵敏度函数和补灵敏度函数的其他参数为:

$$k_s = 2.457\ 7, f_s = 0.046\ 9, k_T = 10^{-4},$$

$$f_{T1} = 0.004, f_{T2} = 180, f_{T3} = 240。$$

得到 $D-K$ 迭代法中 $\mathbf{D}_n(s)$ 与标度矩阵 $\mathbf{D}(s)$ 的偏差与迭代次数的关系(如图 1 所示),以及交通流参数速度、密度随时间变化的情况(如表 2 和表 3 所示)。

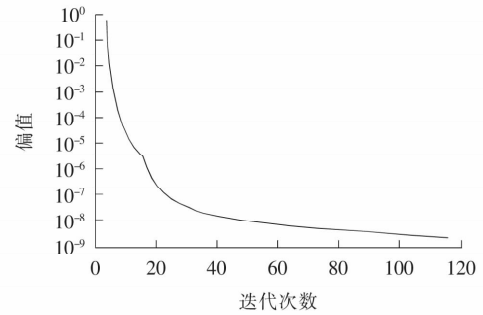


图 1 迭代次数与偏值关系图

Fig. 1 Iteration number and partial value relation

表 2 各时间点各段流量表

Table 2 Each time point of each flow

(辆 · s⁻¹)

	时刻									
	0.0	2.5	5.0	7.5	10.0	15.0	20.0	25.0	30.0	35.0
1	0.338	0.487	0.702	0.492	0.533	0.333	0.341	0.335	0.335	0.336
2	0.338	0.212	0.103	0.204	0.179	0.347	0.351	0.349	0.353	0.348
3	0.338	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4	0.338	0.296	0.284	0.363	0.309	0.314	0.336	0.336	0.336	0.336

表 3 各时间点各段车流密度表

Table 3 Each time point of each traffic density

(辆 · m⁻¹)

	时刻									
	0.0	2.5	5.0	7.5	10.0	15.0	20.0	25.0	30.0	35.0
1	0.017 5	0.032 3	0.004 1	0.074 5	0.024 9	0.018 3	0.016 9	0.017 8	0.017 7	0.017 7
2	0.017 5	0.009 8	0.038 5	0.012 0	0.047 7	0.016 8	0.017 9	0.017 0	0.017 3	0.017 7
3	0.017 5	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
4	0.016 5	0.010 2	0.014 4	0.020 3	0.020 4	0.018 4	0.017 3	0.017 4	0.017 3	0.017 4

通过此次仿真可以看出,在主线某段发生扰动导致参数变化时,通过使用高速公路主线非线性鲁棒限速控制可得:在路段 3 车道封闭后的第 15 时刻,各段的车流密度与车流量已不再波动,达到稳定状态,表明此种方法可以使受到外部扰动的交通流尽快恢复稳定流状态;在车道封闭期间,车流量、密度都发生振动状态,但随着时间的推移,振动幅度逐渐减小,若封闭时间足够长,则会稳定于平衡点附近。

5 结论

1) 在研究高速公路主线可变限速的控制问题中,针对高速公路是一个非线性且不确定性的系

统,将鲁棒控制方法中的公称值系统方法、严密反馈线性化方法等计算方式运用其中,这种方法相比于之前广泛应用的智能算法,能完美地解决了后者所不能解决的动态因素控制问题(即由外部因素扰动造成的交通流不稳定问题),且运算过程简便,迭代步骤较少,一般不超过 200 次。

2) 由算例结论可知,在对高速公路非线性系统进行严密线性化的处理过程中,引入灵敏度函数、补灵敏度函数以及标量函数是必不可少的。从数据处理的结果来看,合理选定这三个参数对结果的影响非常巨大。

3) 在对系统控制器 $K(s)$ 进行求解时所使用到的 $D-K$ 迭代法,随着迭代次数的增长可以看出偏值是逐渐收敛的。这一方法的有效性虽然在许

多实践中得以确认,但仍存在着迭代次数多且较难得到最优解的缺陷,这方面仍需在日后的实践中做进一步的研究。

〔参考文献〕

- [1] 谭满春.面向 ITS 高速公路网交通分配与入口匝道控制方法研究[D].广州:华南理工大学,2000.
TAN Man-chun, Research on ITS-Oriented methods for traffic assignment and on-ramp control in freeway networks[D].Guangzhou: South China University of Technology, 2000.
- [2] 唐华秀.基于 IGS 的道路交通网可靠性分析研究[D].南京:南京大学,2008.
TANG Hua-xiu, Reliability analysis of road traffic network based on IGS[D].Nanjing: Nanjing University, 2008.
- [3] 翟润平,周彤梅,安荷萍.高速公路限速控制研究[J].公安大学学报,2001,26(6):34-38.
ZHAI Run-ping, ZHOU Tong-mei, AN He-ping, Study on expressway speed limit control[J].Journal of Chinese People's Public Security University, 2001, 26(6):34-38.
- [4] 陈大山.高速公路主线可变限速控制研究[D].西安:长安大学,2009.
CHEN Da-shan, Variable control of highway[D].Xi'an: Chang'an University, 2009.
- [5] 马明辉,杨庆芳,梁士栋.基于元胞传输模型的高速公路可变限速控制[J].华中科技大学学报:自然科学版,2015(9):46-50.
MA Ming-hui, YANG Qing-fang, LIANG Shi-dong, Variable speed limits for freeway based on cell transmission model[J].Journal of Huazhong University of Science and Technology: Natural Science Edition, 2015(9):46-50.
- [6] 王薇,梁红梅,李立超.高速公路可变限速控制算法研究[J].北华大学学报:自然科学版,2014(1):122-125.
WANG Wei, LIANG Hong-mei, LI Li-chao, Variable speed limit control algorithm of freeway[J].Journal of Beihua University: Natural Science, 2014(1):122-125.
- [7] 王磊.基于交通流状态和 85% 位车速的雾天高速公路限速值研究[D].北京:北京交通大学,2015.
WANG Lei, Study on speed limit of freeway in foggy day based on traffic flow condition and 85%th speed [D].Beijing: Beijing Jiaotong University, 2015.
- [8] 邬洪波,王璇.高速公路合理限速综合确定方法研究[J].公路,2016(12):170-175.
WU Hong-bo, WANG Xuan, The comprehensive determination method of freeway speed limit[J].Highway, 2016(12):170-175.
- [9] Shreekant Gayaka, Output feedback based adaptive robust fault-tolerant control for a class of uncertain nonlinear systems[J].Journal of Systems Engineering and Electronics, 2011(1):38-51.
- [10] WU J Z, JI Y Q, LIU X W, et al. Generalized internal model robust control for active front steering intervention[J].Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2015(2):285-293.
- [11] PENG F, QIAN G L, TAO D Y, et al. A modified direct adaptive robust motion trajectory tracking controller of a pneumatic system[J].Journal of Zhejiang University-Science C: Computers and Electronics, 2014(10):878-891.
- [12] C I Marrison, R F Stengel, Design of robust control systems for a hypersonic aircraft [J]. Journal of Guidance Control and Dynamics, 2012, 21(1):58-63.
- [13] 王正武,罗大庸,黄忠祥.高速公路主线限速与匝道融合的协调控制[J].控制理论与应用,2007,24(6):973-976.
WANG Zheng-wu, LUO Da-yong, HUANG Zhong-xiang, Coordinated control of variable speed limits and ramp metering[J].Control Theory and Applications, 2007, 24(6):973-976.
- [14] 苏宏业.鲁棒控制基础理论[M].北京:科学出版社,2010.
SU Hong-ye, Robust control theory[M].Beijing: Science Press, 2010.