

DOI:10.19951/j.cnki.1672-9331.20230504001

文章编号:1672-9331(2025)01-0091-10

引用格式:王恒佳,潘军,彭晖,等.表层嵌贴CFRP-混凝土结构的弹性半解析解[J].长沙理工大学学报(自然科学版),2025,22(1):91-100.

Citation: WANG Hengjia, PAN Jun, PENG Hui, et al. Elastic semi-analytical solution of near-surface mounted CFRP-concrete structures[J]. J Changsha Univ Sci Tech (Nat Sci), 2025, 22(1): 91-100.

表层嵌贴CFRP-混凝土结构的弹性半解析解

王恒佳,潘军,彭晖,赵冰

(长沙理工大学 土木与环境工程学院,湖南 长沙 410114)

摘要:【目的】深入了解表层嵌贴碳纤维复合材料-混凝土结构的力学性能,探究环氧树脂胶内部位移和应力分布规律。【方法】将开槽内的环氧树脂胶及碳纤维复合材料板条简化为二维平面应变模型,并考虑切应力沿胶层厚度方向的分布规律来建立环氧树脂胶位移的控制方程,用复数项级数法得到控制方程的弹性半解析解。【结果】弹性半解析解可以描述切应力沿胶层厚度方向的分布规律:切应力呈开口向下的抛物线形分布越靠近加载端,抛物线的弧度越大。将弹性半解析解结果与有限元模拟结果对比,可发现:水平位移峰值的解析结果与二维有限元模拟结果相差4.66%,与三维有限元模拟结果相差14.79%;切应力峰值的解析结果与二维有限元模拟结果相差3.58%,与三维有限元模拟结果相差17.85%。将弹性半解析解结果与试验结果对比,发现解析结果与试验结果在线弹性范围内基本吻合。【结论】弹性半解析解可直接计算线弹性阶段内环氧树脂胶的位移及切应力,可为表层嵌贴碳纤维复合材料板条-混凝土结构的安全性评估与设计提供一种新的、简便的、高效的计算方法。

关键词:表层嵌贴;碳纤维复合材料;混凝土结构加固;环氧树脂胶;弹性半解析解;切应力分布

中图分类号:U443.3;O343.1;TU528.572

文献标志码:A

Elastic semi-analytical solution of near-surface mounted CFRP-concrete structures

WANG Hengjia, PAN Jun, PENG Hui, ZHAO Bing

(School of Civil and Environmental Engineering, Changsha University of Science & Technology, Changsha 410114, China)

Abstract: [Purposes] This paper aims to investigate the mechanical properties of the near-surface mounted (NSM) carbon fiber reinforced plastic (CFRP)-concrete structures and explore the internal displacement and stress distribution laws of epoxy adhesive in the structures. [Methods] The epoxy adhesive and CFRP strips in the slot were simplified into a two-dimensional (2D) plane strain model. A governing equation for the displacement of the epoxy adhesive was established, incorporating the shear stress distribution along the thickness direction of the adhesive layer. An elastic semi-analytical solution was derived using a complex exponential series. [Findings] The elastic semi-analytical solution can describe the distribution law of shear stress along the thickness direction of the adhesive layer. The shear stress has a parabola with a downward

收稿日期:2023-05-04; 修回日期:2023-05-29; 接受日期:2023-05-29

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51578078、52178186)

通信作者:潘军(1970—)(ORCID:0009-0003-5390-6893),男,讲师,主要从事固体的破坏理论与数值模拟方面的研究。E-mail:002935@csust.edu.cn

投稿网址: <http://csjgxbzk.csust.edu.cn/cslgdxzbzk/home>

opening, and the curvature of the parabola becomes larger as the curve is closer to the loading end. By comparing the elastic semi-analytical solution results with finite element method (FEM) simulation results, it is found that the analytical results of the peak horizontal displacement are 4.66% smaller than the 2D FEM simulation results and 14.79% larger than the three-dimensional (3D) FEM simulation results. The analytical results of the peak shear stress are 3.58% smaller than the 2D FEM simulation results and 17.85% larger than the 3D FEM simulation results. The results of the elastic semi-analytical solution are compared with the experimental results, and it is found that the analytical results are basically consistent with the experimental results in the linear elastic range. [Conclusions] The displacement and shear stress of the epoxy adhesive in the linear elastic stage, which can provide a new, convenient, and effective calculation method for the safety assessment and design of NSM CFRP strip-concrete structures, can be directly calculated by the elastic semi-analytical solution.

Key words: near-surface mounted; carbon fiber reinforced plastic; concrete structure reinforcement; epoxy adhesive; elastic semi-analytical solution; shear stress distribution

Foundation items: Projects (51578078, 52178186) supported by the National Natural Science Foundation of China

Corresponding author: PAN Jun (1970—) (ORCID: 0009-0003-5390-6893), male, lecturer, research interest: solid failure theory and numerical simulation. E-mail: 002935@csust.edu.cn

0 引言

碳纤维复合材料(carbon fiber reinforced plastics, CFRP)加固混凝土的方式分为表层嵌贴(near-surface mounted, NSM)和表面粘贴(externally bonded, EB)两种^[1]。表层嵌贴由于增加了CFRP板条和混凝土之间的黏结面积,提高了CFRP板条的利用率,近年来逐渐成为混凝土结构加固领域的研究重点^[2-3]。表层嵌贴CFRP板条-混凝土结构中的CFRP板条受拉伸产生的拉应力通过环氧树脂胶传递给混凝土基体,胶层内及其界面的应力分布是影响表层嵌贴CFRP板条-混凝土结构力学性能的主要因素^[4]。为了深入了解CFRP板条-混凝土结构力学性能,业内需要对黏结界面进行分析研究,探究胶层的内部应力分布情况。弹性解析解是研究CFRP板条-混凝土结构界面应力分布的重要手段,具有数值模拟无法比拟的优势,更契合设计人员的需求,也是设计和评估相关加固效果的基础。

目前,表层嵌贴CFRP板条-混凝土结构的弹性解析解大多假设了切应力沿胶层厚度方向保持不变。ZHANG等^[5]基于表面粘贴CFRP板条加固

方式的常微分控制方程^[6],引入了两个界面刚度参数,用切向相互作用力和法向相互作用力分别替代了界面切应力和法向应力,得到了表层嵌贴CFRP板条-钢筋混凝土梁的界面应力弹性解析解。任振华等^[7]考虑胶层厚度,对表层嵌贴CFRP筋加固混凝土开槽内的CFRP筋、环氧树脂胶和槽边混凝土的应力状态进行了解析,同时还将槽内环氧树脂胶由内圆外方断面的柱体简化为厚壁圆筒断面的柱体,使得边界条件容易满足,推出应力解。显然,这些弹性解析解是通过假设切应力沿胶层厚度方向保持不变来考虑胶层厚度对表层嵌贴CFRP板条-混凝土结构力学性能的影响的。

还有一些学者基于黏结-滑移模型对表层嵌贴CFRP板条-混凝土结构进行了解析研究。如ZHANG等^[8]、TENG等^[9]、彭晖等^[10]和DA COSTA等^[11]都基于黏结-滑移模型给出了含弹性阶段的半解析公式。在黏结-滑移模型中,胶层厚度通过影响界面初始刚度和界面破坏能,从而对界面黏结性能产生影响^[12]。但该方法同样包含了切应力沿胶层厚度方向保持不变的假设。

综上所述,业内在分析表层嵌贴CFRP板条-混凝土结构时,大都假设胶层中切应力沿厚度方向均匀分布或线性分布,无法描述非线性分布规

律。而实际上端部胶层内部应力分布复杂,且无法通过试验测得,因此有必要对胶层内应力做进一步分析。

本文将开槽内的CFRP板条和环氧树脂胶简化为平面应变模型,首先建立环氧树脂胶位移的控制方程以考虑切应力沿胶层厚度方向的分布规律,然后以复数项级数的虚部作为控制方程的通解得到环氧树脂胶位移和切应力的弹性半解析解,最后研究切应力沿胶层厚度方向的非线性分布规律。

1 理论模型及求解方法

1.1 问题描述

图1为表层嵌贴CFRP板条-混凝土的单剪拉拔试验标准试件。从图1可以看出,整个试件由三部分构成,即CFRP板条、环氧树脂胶和混凝土。其中,混凝土试件的厚度为 $t^{(c)}$,宽度为 $b^{(c)}$,黏贴长度为 L ;CFRP板条的宽度为 $b^{(p)}$,厚度为 $t^{(p)}$;环氧树

脂胶的宽度为 $b^{(g)}$;CFRP板条边缘到槽壁的距离为 $t^{(g)}$; F 为单剪拉拔荷载。以非加载端环氧树脂胶与混凝土交界面的中心为原点建立直角坐标系。开槽内环氧树脂胶及CFRP板条的 $I-I$ 剖面图如图1(b)所示。考虑结构的对称性,可选取其1/2为本文研究对象,如图1(c)所示。

1.2 环氧树脂胶的控制方程与边界条件

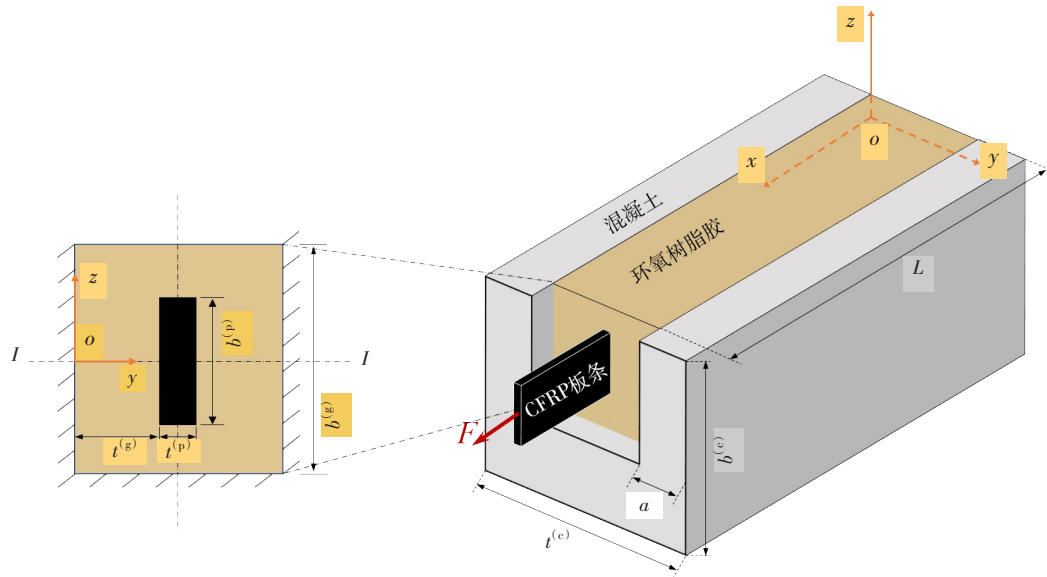
1.2.1 基本假设

1) 将图1(b)和图1(c)中的研究对象简化为在 xoy 平面上的应变模型。这是因为CFRP板条的宽度 $b^{(p)}$ 远大于其厚度 $t^{(p)}$,此时满足式(1a)、式(1b)。

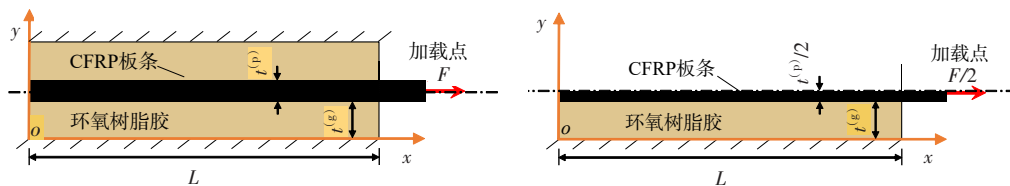
$$\varepsilon_{zz}^{(g)} = \frac{1}{E^{(g)}} \left[\sigma_{zz}^{(g)} - \mu^{(g)} (\sigma_{xx}^{(g)} + \sigma_{yy}^{(g)}) \right] = 0 \quad (1a)$$

$$\varepsilon_{zz}^{(p)} = \frac{1}{E^{(p)}} \left[\sigma_{zz}^{(p)} - \mu^{(p)} (\sigma_{xx}^{(p)} + \sigma_{yy}^{(p)}) \right] = 0 \quad (1b)$$

式中: $E^{(p)}$ 和 $\mu^{(p)}$ 分别为CFRP板条的弹性模量和泊松比; $\sigma_{xx}^{(p)}$ 、 $\sigma_{yy}^{(p)}$ 和 $\sigma_{zz}^{(p)}$ 都为CFRP板条的正应力; $\varepsilon_{xx}^{(p)}$ 、 $\varepsilon_{yy}^{(p)}$ 和 $\varepsilon_{zz}^{(p)}$ 都为CFRP板条的正应变; $\tau_{yx}^{(p)}$ 和 $\gamma_{yx}^{(p)}$ 分别为CFRP板条的切应力和切应变; $E^{(g)}$ 和 $\mu^{(g)}$ 分



(a) 标准试件轴测图和环氧树脂胶与CFRP板条的横截面



(b) $I-I$ 剖面图

(c) $1/2 I-I$ 剖面图

图1 表层嵌贴CFRP板条-混凝土单剪拉拔试验的标准试件

Fig. 1 Standard specimen for single shear-pull out experiment of NSM CFRP strip-concrete

别为环氧树脂胶的弹性模量和泊松比; $\sigma_{xx}^{(g)}$ 、 $\sigma_{yy}^{(g)}$ 和 $\sigma_{zz}^{(g)}$ 都为环氧树脂胶的正应力; $\varepsilon_{xx}^{(g)}$ 、 $\varepsilon_{yy}^{(g)}$ 和 $\varepsilon_{zz}^{(g)}$ 都为环氧树脂胶的正应变; $\tau_{yx}^{(g)}$ 和 $\gamma_{yx}^{(g)}$ 分别为环氧树脂胶的切应力和切应变。

2) 假设混凝土基体的刚度足够大^[13],即混凝土基体不产生位移。这是因为混凝土弹性模量远大于环氧树脂胶弹性模量,即

$$u^{(g)}(x, 0) = 0 \quad (2)$$

式中: $u^{(g)}(x, 0)$ 为环氧树脂胶沿 x 方向的位移。

3) CFRP板条和环氧树脂胶在 y 方向上的变形均可以被忽略。这是因为CFRP板条和环氧树脂胶在 x 方向上的位移远超过其在 y 方向上的位移,此时满足式(3a)与式(3b)。

$$\varepsilon_{yy}^{(g)} = \frac{1}{E^{(g)}} [\sigma_{yy}^{(g)} - \mu^{(g)}(\sigma_{xx}^{(g)} + \sigma_{zz}^{(g)})] = 0 \quad (3a)$$

$$\varepsilon_{yy}^{(p)} = \frac{1}{E^{(p)}} [\sigma_{yy}^{(p)} - \mu^{(p)}(\sigma_{xx}^{(p)} + \sigma_{zz}^{(p)})] = 0 \quad (3b)$$

4) CFRP板条满足平截面假定。

5) 环氧树脂胶与CFRP板条满足各向同性、线弹性和小变形的假设。

1.2.2 环氧树脂胶的控制方程

为建立环氧树脂胶位移的控制方程,本研究先用位移表示环氧树脂胶的各应力分量。

环氧树脂胶在 x 方向的正应变为

$$\varepsilon_{xx}^{(g)} = \frac{\partial u^{(g)}(x, y)}{\partial x} \quad (4)$$

根据基本假设3),环氧树脂胶的切应变可写为

$$\gamma_{yx}^{(g)} = \frac{\partial u^{(g)}(x, y)}{\partial y} \quad (5)$$

式(1a)、式(3a)相加,则有

$$\sigma_{yy}^{(g)} + \sigma_{zz}^{(g)} = \frac{2\mu^{(g)}\sigma_{xx}^{(g)}}{1 - \mu^{(g)}} \quad (6)$$

根据广义胡克定律,并结合式(6),则有

$$\sigma_{xx}^{(g)} = \frac{E^{(g)}(1 - \mu^{(g)})}{(1 + \mu^{(g)})(1 - 2\mu^{(g)})} \varepsilon_{xx}^{(g)} \quad (7)$$

将式(4)代入式(7),可得

$$\sigma_{xx}^{(g)} = \frac{E^{(g)}(1 - \mu^{(g)})}{(1 + \mu^{(g)})(1 - 2\mu^{(g)})} \frac{\partial u^{(g)}(x, y)}{\partial x} \quad (8)$$

根据广义胡克定律中的剪切胡克定律,并结合(5)式,可得

$$\tau_{yx}^{(g)} = G^{(g)} \frac{\partial u^{(g)}(x, y)}{\partial y} \quad (9)$$

式中: $G^{(g)} = \frac{E^{(g)}}{2(1 + \mu^{(g)})}$ 为环氧树脂胶的剪切模量。

环氧树脂胶内的一微元体的应力状态如图2所示。

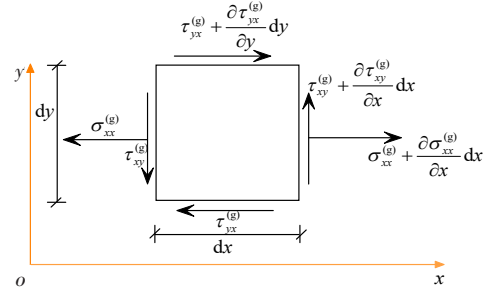


图2 环氧树脂胶微元体的应力状态

Fig. 2 Stress state of epoxy adhesive microelement

由 x 方向平衡,可得

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^{(g)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}^{(g)}}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

将位移表示的应力分量代入平衡方程,即将式(8)~(9)代入式(10),可得到环氧树脂胶位移的控制方程式(11)。

$$q^2 \frac{\partial^2 u^{(g)}(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^{(g)}(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (11)$$

式中: $q^2 = \frac{2(1 - \mu^{(g)})}{1 - 2\mu^{(g)}}$ 。

1.2.3 环氧树脂胶的边界条件

1) 环氧树脂胶的上边界条件。

CFRP板条微段如图3所示。

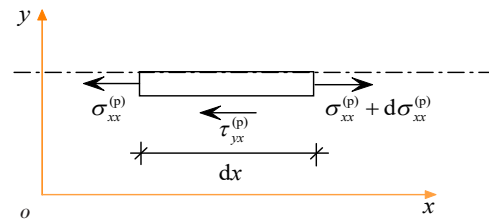


图3 CFRP板条微段的应力状态

Fig. 3 Stress state of CFRP microsegment

类似1.2.2节,用位移表示的CFRP板条正应力表达式为

$$\sigma_{xx}^{(p)} = \frac{E^{(p)}(1 - \mu^{(p)})}{(1 + \mu^{(p)})(1 - 2\mu^{(p)})} \frac{\partial u^{(p)}(x, y)}{\partial x} \quad (12)$$

CFRP板条微段的平衡条件^[14]为

$$\frac{d\sigma_{xx}^{(p)}}{dx} = \frac{\tau_{yx}^{(p)} S^{(p)}}{A^{(p)}} \quad (13)$$

式中: $A^{(p)}$ 为CFRP板条截面面积的一半; $S^{(p)}$ 为CFRP板条周长的一半,其值在本文的平面应变模型中等于 $b^{(p)}$ 的值。

将位移表示的应力分量代入平衡方程,即将式(12)代入式(13),可得

$$\frac{E^{(p)}(1-\mu^{(p)})}{(1+\mu^{(p)})(1-2\mu^{(p)})} \frac{\partial^2 u^{(p)}(x, y)}{\partial x^2} - \frac{\tau_{yx}^{(p)} S^{(p)}}{A^{(p)}} = 0 \quad (14)$$

当 $y=t^{(g)}$ 时,环氧树脂胶上表面与CFRP板条下表面相接触。此时,因变形连续,可得

$$u^{(p)}(x, t^{(g)}) = u^{(g)}(x, t^{(g)}) \quad (15a)$$

$$\tau_{yx}^{(p)} \Big|_{y=t^{(g)}} = \tau_{yx}^{(g)} \Big|_{y=t^{(g)}} = G^{(g)} \frac{\partial u^{(g)}(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=t^{(g)}} \quad (15b)$$

将式(15a)、式(15b)代入式(14),可得

$$\frac{E^{(p)}(1-\mu^{(p)})}{(1+\mu^{(p)})(1-2\mu^{(p)})} \frac{\partial^2 u^{(g)}(x, y)}{\partial x^2} \Big|_{y=t^{(g)}} - \frac{E^{(g)} S^{(p)}}{2(1+\mu^{(g)}) A^{(p)}} \frac{\partial u^{(g)}(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=t^{(g)}} = 0 \quad (16)$$

将式(16)代入式(11),可得环氧树脂胶上边界条件式(17)。

$$d \frac{\partial u^{(g)}(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=t^{(g)}} + \frac{\partial^2 u^{(g)}(x, y)}{\partial y^2} \Big|_{y=t^{(g)}} = 0 \quad (17)$$

式中: d 的定义式为

$$d = \frac{(1-\mu^{(g)})(1+\mu^{(p)})(1-2\mu^{(p)})}{1-2\mu^{(g)}} \frac{E^{(p)}(1-\mu^{(p)})}{E^{(p)}(1-\mu^{(p)})} \frac{E^{(g)} S^{(p)}}{(1+\mu^{(g)}) A^{(p)}}。$$

2) 环氧树脂胶的左边界条件。

环氧树脂胶左端无约束,可知

$$u^{(g)}(0, y) \neq 0 \quad (18)$$

3) 环氧树脂胶加载端的点边界条件如图1(c)所示。

由CFRP板条的单剪拉拔荷载 F 可知,CFRP板条在加载端的正应变需满足

$$\varepsilon_{xx}^{(p)} \Big|_{x=L, y=t^{(g)}} = \frac{\partial u^{(p)}(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=L, y=t^{(g)}} = \frac{F(1+\mu^{(p)})(1-2\mu^{(p)})}{E^{(p)} A^{(p)} (1-\mu^{(p)})} \quad (19)$$

由连续性条件 $\varepsilon_{xx}^{(p)} \Big|_{x=L, y=t^{(g)}} = \varepsilon_{xx}^{(g)} \Big|_{x=L, y=t^{(g)}}$,可得环氧树脂胶在加载端的点边界条件为

$$\frac{\partial u^{(g)}(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=L, y=t^{(g)}} - \frac{F(1+\mu^{(p)})(1-2\mu^{(p)})}{E^{(p)} A^{(p)} (1-\mu^{(p)})} = 0 \quad (20)$$

综上所述,环氧树脂胶的控制方程为式(11),

边界条件分别为式(3)、式(17)、式(18)和式(20)。

1.3 控制方程的求解

式(11)是拉普拉斯方程。解析函数的实部和虚部均是拉普拉斯方程的解。令复数项级数的虚部为式(11)的通解,即

$$u^{(g)}(x, y) = \text{Im} \left[\frac{C_1 z}{1!} + \frac{C_2 z^3}{3!} + \frac{C_3 z^5}{5!} + \dots + \frac{C_n z^{2n-1}}{(2n-1)!} \right] \quad (21)$$

式中: $z=x+qyi$ 为解析函数; Im 为复数的虚部; n 为复数项级数的阶数; $C_1, C_2, \dots, C_n$ 都为待定系数。

通解式(21)自动满足式(3)和式(18)的边界条件,但不能严格满足式(17)和式(20)的边界条件。为此,将通解式(21)代入式(17)可得到残差 Δ_1 ,将通解式(21)代入式(20)可得到残差 Δ_2 。由最小二乘法,并考虑到量纲一致,可令残差的平方和 $\int_0^L \Delta_1^2 dx + \Delta_2^2/L$ 最小,此时存在

$$\frac{\partial \left(\int_0^L \int_0^L \Delta_1^2 dx + \Delta_2^2/L \right)}{\partial C_i} = 0, \quad i=1, 2, 3, \dots, n \quad (22)$$

此时,首先通过解方程组求得待定系数 C_i ,然后得到环氧树脂胶水平位移的弹性半解析解(elastical semi-analytic solutions, ESAS),最后将环氧树脂胶水平位移解代入式(5)和式(9),即可分别得到切应变解和切应力解。

为验证弹性半解析解的收敛性,计算了一组以不同阶数复数项级数为通解时的残差的平方和,其中参数如表1所示,结果如表2所示。

由表2可知,每增加一个待定系数,残差的平方和数值下降2~3个数量级,且级数形式的解收

表1 验证算例的参数

Table 1 Parameters for verifying examples

材料类型	几何与材料参数	黏结长度 L/mm	拉拔荷载 F/kN
CFRP板条	$T^{(p)}=4.0 \text{ mm}$, $b^{(p)}=16.0 \text{ mm}$, $A^{(p)}=16.0 \text{ mm} \times 2.0 \text{ mm}$, $E^{(p)}=140.20 \text{ GPa}$, $\mu^{(p)}=0.2$	280	12
环氧树脂胶	$t^{(g)}=5.5 \text{ mm}$, $b^{(g)}=30.0 \text{ mm}$, $E^{(g)}=2.63 \text{ GPa}$, $\mu^{(g)}=0.2$		

表2 弹性半解析解的收敛性

Table 2 Convergence of elastic semi-analytical solution

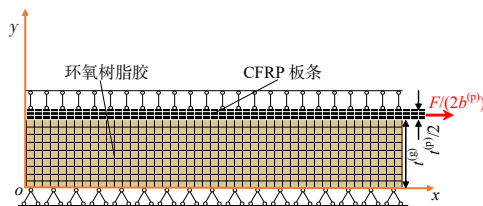
阶数	残差的平方和	阶数	残差的平方和
4	$1.750 0 \times 10^{-9}$	7	$3.791 6 \times 10^{-15}$
5	$5.667 4 \times 10^{-11}$	8	$1.317 6 \times 10^{-17}$
6	$6.326 3 \times 10^{-13}$	9	$2.809 4 \times 10^{-20}$

敛较快。当 $n=5$ 时,残差的平方和数值为 5.6674×10^{-11} ,满足一般精度要求。为减少计算量,本文的后续算例均取 $n=5$ 。

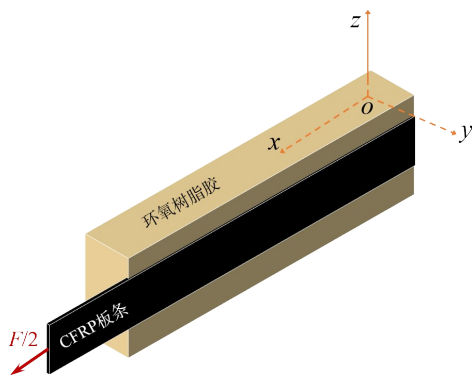
2 结果

2.1 解析结果与有限元模拟结果对比

为验证弹性半解析解的正确性,本研究对比了弹性半解析解与有限元模拟结果,并采用有限元软件建立二维平面应变有限元模型和三维有限元模型,如图4所示。图4(a)采用Plane42单元模拟CFRP板条和环氧树脂胶,图4(b)采用solid185单元模拟CFRP板条和环氧树脂胶。二维有限元模型的约束分别为CFRP板条对称面 y 方向约束、环氧树脂胶的下表面 x 与 y 方向约束;三维有限元模型的约束分别为环氧树脂胶底面 x 和 z 方向约束、左侧面 x 和 y 方向约束、右侧对称面 y 方向约束。三维有限元取的是代表截面,即图1(b)中的 $I-I$ 剖面,其计算结果和所有的模型参数如表1所示。



(a) 二维平面应变有限元模型



(b) 三维有限元模型

图4 有限元模型图

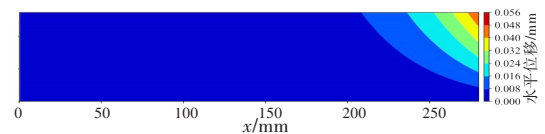
Fig.4 FEM model

2.1.1 环氧树脂胶的水平位移对比 看到这里了

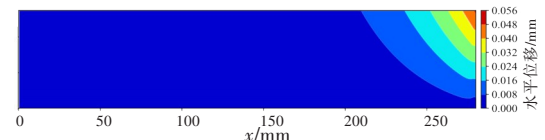
图5是水平位移云图。从图5可以看出,弹性半解析解与有限元计算结果的规律一致,且其解析结果与二维有限元计算结果非常接近,三维有

限元计算结果略小于上述二者的结果。

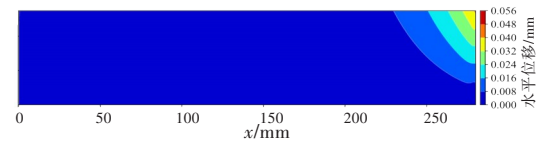
图6给出了环氧树脂胶与CFRP交界面的水平位移。从图6可以看出,水平位移峰值的弹性半解析结果(4.750×10^{-2} mm)比二维有限元模拟结果(4.982×10^{-2} mm)小4.66%,比三维有限元模拟结果(4.138×10^{-2} mm)大14.79%。这说明,将三维的表层嵌贴CFRP板条加固混凝土简化为平面应变模型带来了误差。误差源于从三维模型图1(a)到二维平面应变模型图1(c)的简化过程。这是因为该简化操作实质上放松了开槽底部混凝土对环氧树脂胶的约束,导致三维模型的位移结果小于平面应变模型的位移结果。



(a) 弹性半解析解的水平位移云图



(b) 二维有限元模拟的水平位移云图



(c) 三维有限元模拟的水平位移云图

图5 不同方式下的环氧树脂胶的水平位移云图对比

Fig.5 Comparison of horizontal displacement cloud diagrams of epoxy adhesive under different methods

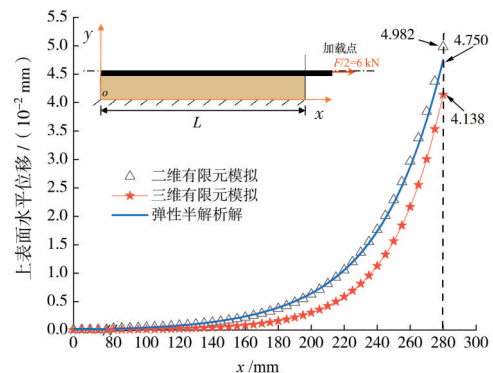


图6 环氧树脂胶与CFRP板条交界面的水平位移对比

Fig.6 Comparison of horizontal displacement between epoxy adhesive and CFRP strip interface

2.1.2 环氧树脂胶的切应力对比

不同方式下的环氧树脂胶的切应力云图对比

如图7所示。环氧树脂胶与CFRP板条交界面的切应力对比如图8所示。

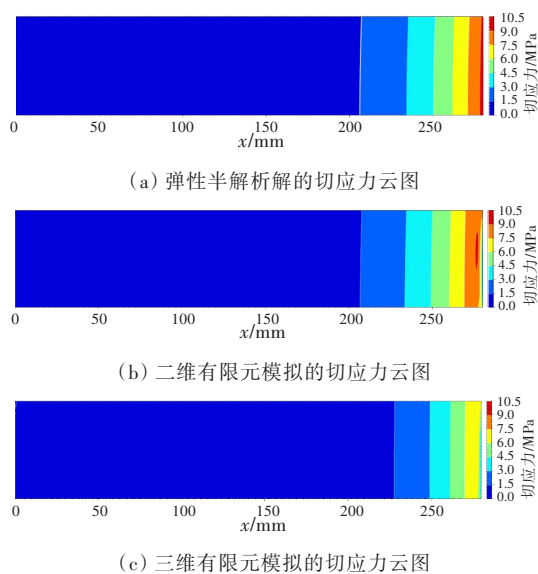


图7 不同方式下的环氧树脂胶的切应力云图对比

Fig. 7 Comparison of shear stress cloud diagrams of epoxy adhesive under different methods

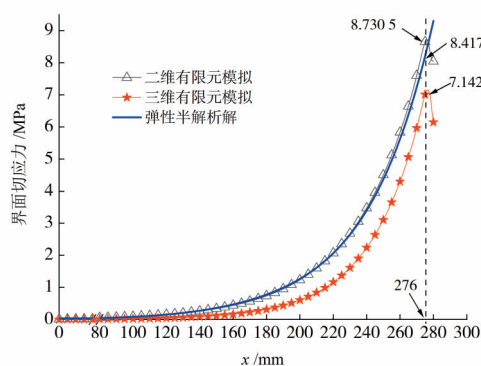


图8 环氧树脂胶与CFRP板条交界面的切应力对比

Fig. 8 Comparison of shear stress between epoxy adhesive and CFRP strip interface

从图7可以看出,二维有限元模拟的计算结果和ESAS的解析结果非常接近,而三维有限元模拟的计算结果小于其他二者的。这与2.1.1节中水平位移云图的规律是一致的。

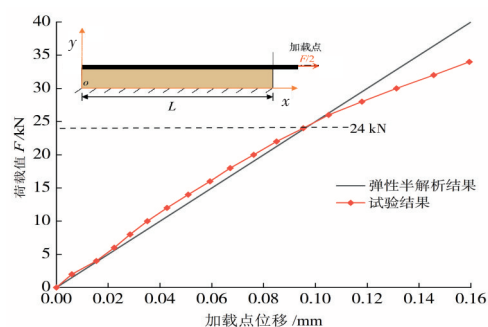
与图6不同的是,在图8的有限元模拟结果中,加载端附近出现应力下降现象,切应力下降段的长度约为4.0 mm。这是因为:弹性半解析解在图1(c)的环氧树脂胶的右侧面无约束,此时加载端的切应力在理论上应为零。然而,根据切应力互等定理,交界面右侧节点的切应力也应为零,并且当网格进一步加密时,切应力将逐步下降为零,但下降段的长度几乎不变^[15]。

从图8可以看出,若以有限元模拟结果的拐点作为切应力峰值,则切应力峰值的解析结果(8.417 7 MPa)比二维有限元模拟结果(8.730 5 MPa)小3.58%,比三维有限元模拟结果(7.142 9 MPa)大17.85%。该规律与图6中的规律一致,且误差产生的原因也是一样的。

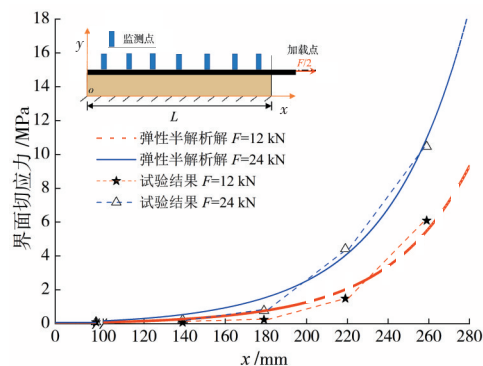
2.1.1节和2.1.2节的计算结果均表明,解析结果与有限元结果吻合较好。这证实了本文将表层嵌贴的三维问题简化为平面应变模型的合理性和弹性半解析解的正确性。

2.2 解析结果与试验结果对比

本文半解析结果与本课题组彭晖等^[1]的单剪拉拔试验前期研究结果如图9所示,可用于比较和验证弹性半解析解的可靠性。本研究参数取值与彭晖等^[1]的试验参数取值保持一致,后者对应的物理试验为在CFRP板条上设置7个切应力数据点,即每隔20 mm设置一个切应力测点,如图9(b)所示。



(a) 荷载-位移曲线对比



(b) 环氧树脂胶与CFRP交界面的切应力对比

图9 单剪拉拔工况下弹性半解析解结果与试验结果

Fig. 9 Elastic semi-analytical solution results and experimental results under single shear-pull out condition

从图9(a)可以看出,弹性半解析结果的荷载-位移曲线是完全线性的,而试验结果从一开始就

显示出了一定的非线性效应。当荷载小于 24 kN 时,荷载-位移曲线的弹性半解析结果与试验结果非常接近,此时的试验曲线基本处于线弹性阶段。从图 9(b)也可以看出,解析结果与物理试验测得的切应力分布基本一致,这也证实了弹性半解析解的可靠性。

3 讨论

3.1 切应力沿胶层厚度方向的分布规律

从图 7 可以看出,切应力沿环氧树脂胶厚度方向并不是均匀或线性分布的。为了更加直观,我们将图 7 中的 $x=200$ 、250 和 270 mm 截面的切应力分布绘制在图 10 中。

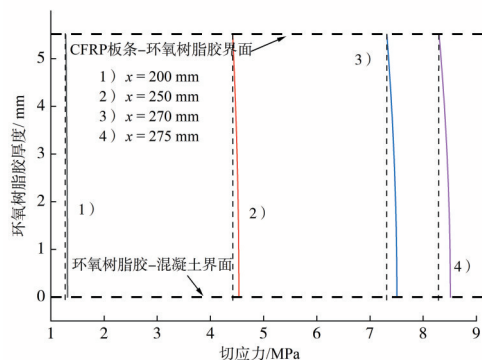


图 10 沿环氧树脂胶厚度方向的切应力分布

Fig. 10 Distribution of shear stress along thickness direction of epoxy adhesive

从图 10 中可以看出,沿环氧树脂胶厚度方向每个截面的切应力分布规律都不同:当远离加载端时,环氧树脂胶上下表面的切应力相差较小,切应力分布近似于一条直线;当靠近加载端时,上下表面的切应力相差较大,切应力分布近似于一条抛物线。这与在表面粘贴 CFRP 加固混凝土梁的理论推导结果相似^[16]。但文献[16]的作者首先假设胶层的正应力沿胶层厚度方向呈线性分布,进而得到结论——切应力沿胶层厚度方向的解析函数为二次函数。而本文模型并无此假设,且本文中的切应力分布规律是一个高次函数。

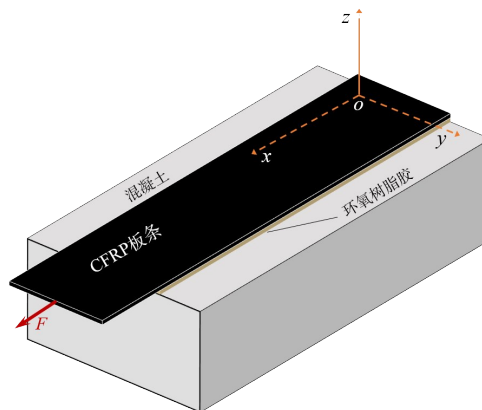
另外,由有限元模拟和本文模型得到的切应力均出现了环氧树脂胶下表面切应力大于上表面切应力的现象,且越靠近加载端,该现象越明显。

表层嵌贴 CFRP 板条-混凝土结构在混凝土强

度较低或槽边距较小时,容易发生混凝土内聚破坏和槽边劈裂破坏的现象^[1,17]。本文上述的切应力分布规律可以对该现象在一定程度上作出解释。

3.2 简化为表面粘贴 CFRP-混凝土加固模型

单剪拉拔工况下表面粘贴 CFRP 板条-混凝土试件如图 11 所示。本研究将本文模型用于图 11(a)中的表面粘贴 CFRP 板条-混凝土试件。从图 11(a)的侧面看,CFRP 板条与环氧树脂胶的三维模型可被简化为 zox 平面内的平面应变模型,如图 11(b)所示。图 11(b)与图 1(c)的不同之处在于,仅仅是环氧树脂胶层变得较薄,基本假设与边界条件均不变。但由于环氧树脂胶层的长度与厚度之比较大,本研究在推导表面粘贴 CFRP 加固方式的弹性半解析解时,必须增大弹性半解析解的阶数。



(a) 表面粘贴 CFRP 板条-混凝土试件



(b) 平面应变模型的表面粘贴 CFRP 与环氧树脂胶

图 11 单剪拉拔工况下表面粘贴 CFRP 板条-混凝土试件

Fig. 11 NSM CFRP strip-concrete specimen under single shear-pull out condition

3.3 可推广为对称工况下的弹性半解析解

在实际表层嵌贴 CFRP 板条-混凝土结构工程中,开槽内的 CFRP 板条和环氧树脂胶常处于双向受拉的受力状态,如图 12(a)所示。

本研究采用 1.1 节的基本假设和建模方法,利用模型对称性,以 1/4 模型为研究对象进行研究,并推导出相应的控制方程和边界条件,如图 12(b)

所示。相较于单剪拉拔工况,对称工况下环氧树脂胶的控制方程式(11)、下边界条件式(3)、上边界条件式(17)和加载点边界条件式(20)不变,只有左边界条件式(18)应该变为

$$u^{(s)}(0, y) = 0 \quad (23)$$

为求解对称工况下环氧树脂胶的控制方程,通解形式被修正为

$$u^{(s)}(x, y) = \operatorname{Im} \left[\frac{C_1 z^2}{2!} + \frac{C_2 z^4}{4!} + \frac{C_3 z^6}{6!} + \dots + \frac{C_n z^{2n}}{(2n)!} \right] \quad (24)$$

对称工况下环氧树脂胶位移的弹性半解析解可以使用1.3节的方法得到。

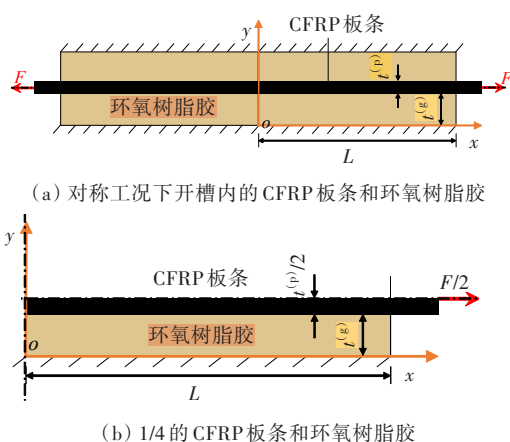


图12 对称工况下的CFRP板条和环氧树脂胶

Fig. 12 CFRP strips and epoxy adhesive under symmetrical condition

4 结论

本文将环氧树脂胶及CFRP板条简化为平面应变模型,推导了表层嵌贴CFRP-混凝土结构中环氧树脂胶位移的弹性半解析解。该解可直接计算环氧树脂胶的弹性位移及切应力。本研究将弹性半解析解、有限元模拟结果和本课题组的试验结果^[1]进行对比,得到以下结论:

- 1) 按照本文的分析思路及求解方法可以得到表面粘贴CFRP加固方式的位移弹性半解析解。
- 2) 有限元模拟结果、物理试验结果均与解析结果有较好的一致性,这验证了本文模型的合理性和解析解的正确性。
- 3) CFRP板条-环氧树脂胶界面的切应力小于环氧树脂胶-混凝土基体界面的,且越靠近加载

端,界面应力差越大。这是导致混凝土内聚破坏和槽边劈裂破坏现象的一个重要因素。

[参考文献]

- [1] 彭晖,丑佳璇,孙溢,等.表层嵌贴CFRP-混凝土结构的黏结性能研究[J].中国公路学报,2019,32(12):156-166. DOI: 10.19721/j.cnki.1001-7372.2019.12.016.
PENG Hui, CHOU Jiaxuan, SUN Yi, et al. Bond behavior of near-surface-mounted CFRP to concrete structure[J]. China Journal of Highway and Transport, 2019, 32(12): 156-166. DOI: 10.19721/j.cnki.1001-7372.2019.12.016.
- [2] JEDRZEJKO M J, ZHANG S S, KE Y, et al. Shear strengthening of RC beams with NSM FRP. I: review of strength models [J]. Advances in Structural Engineering, 2023, 26(3): 564-586. DOI: 10.1177/13694332221125832.
- [3] KE Y, ZHANG S S, JEDRZEJKO M J, et al. Shear strengthening of RC beams with NSM FRP. II: assessment of strength models [J]. Advances in Structural Engineering, 2023, 26(3): 587-608. DOI: 10.1177/13694332221125830.
- [4] 滕锦光,陈建飞,SMITH S.T,等. FRP加固混凝土结构[M].北京:中国建筑工业出版社,2005.
TENG Jinguang, CHEN Jianfei, SMITH S. T. et al. FRP strengthened RC structures [M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2005.
- [5] ZHANG S S, TENG J G. Analytical solution for interaction forces in RC beams strengthened with NSM rectangular bars [C]//Proceedings of the 6th International Conference on FRP Composites in Civil Engineering (CICE-2012). Roma, Italy: Sapienza Università di Roma, 2012: 1-6.
- [6] SMITH S T, TENG J G. Interfacial stresses in plated beams[J]. Engineering Structures, 2001, 23(7): 857-871. DOI: 10.1016/s0141-0296(00)00090-0.
- [7] 任振华,曾宪桃,孙浚博.内嵌CFRP筋加固宽缺口混凝土梁内力解析与试验研究[J].工程力学,2019,36(4):117-124. DOI: 10.6052/j.issn.1000-4750.2018.01.0084.
REN Zhenhua, ZENG Xiantao, SUN Junbo. Internal force analysis and experimental investigations of wide-gap concrete beams strengthened with near-surface mounted carbon fiber reinforced plastic bars [J]. Engineering Mechanics, 2019, 36(4): 117-124. DOI: 10.6052/j.issn.1000-4750.2018.01.0084.
- [8] ZHANG S S, TENG J G, YU T. Bond-slip model for CFRP strips near-surface mounted to concrete [J]. Engineering Structures, 2013, 56: 945-953. DOI: 10.1016/j.engstruct.2013.05.032.

- [9] TENG J G, ZHANG S S, CHEN J F. Strength model for end cover separation failure in RC beams strengthened with near-surface mounted (NSM) FRP strips [J]. *Engineering Structures*, 2016, 110: 222-232. DOI: 10.1016/j.engstruct.2015.11.049.
- [10] 彭晖, 高勇, 陈俊敏, 等. 表层嵌贴CFRP板条-混凝土界面黏结应力模型的试验与理论研究[J]. *实验力学*, 2014, 29(5): 655-665. DOI: 10.7520/1001-4888-14-155.
PENG Hui, GAO Yong, CHEN Junmin, et al. Experimental and theoretical study on model of interfacial bond stress between near-surface mounted CFRP strips and concrete [J]. *Journal of Experimental Mechanics*, 2014, 29(5): 655-665. DOI: 10.7520/1001-4888-14-155.
- [11] DA COSTA L M, DO RÊGO SILVA J J, DE CARVALHO PIRES DE OLIVEIRA T A. Procedure for determining the strength to shear of reinforced concrete beams strengthened with NSM CFRP [J]. *Materials and Structures*, 2022, 55(3): 97. DOI: 10.1617/s11527-022-01941-9.
- [12] 黄俊豪, 钱永久, 杨华平, 等. 胶层厚度对CFRP布加固RC梁抗弯承载力影响研究[J]. *铁道科学与工程学报*, 2022, 19(3): 743-751. DOI: 10.19713/j.cnki.43-1423/u.T20210294.
HUANG Junhao, QIAN Yongjiu, YANG Huaping, et al. Influence of adhesive thickness on the flexural capacity of reinforced concrete beams strengthened with CFRP sheets [J]. *Journal of Railway Science and Engineering*, 2022, 19(3): 743-751. DOI: 10.19713/j.cnki.43-1423/u.T20210294.
- [13] 曾宪桃, 曾毅轩, 任振华. 基于准平面假定的外贴CFRP板加固宽缺口混凝土梁刚度研究[J]. *铁道科学与工程学报*, 2021, 18(7): 1846-1851. DOI: 10.19713/j.cnki.43-1423/u.T20210238.
ZENG Xiantao, ZENG Yixuan, REN Zhenhua. Research on the rigidity of wide gap concrete beams strengthened with externally bonded CFRP plates based on the quasi plane assumption [J]. *Journal of Railway Science and Engineering*, 2021, 18(7): 1846-1851. DOI: 10.19713/j.cnki.43-1423/u.T20210238.
- [14] ZHOU H, GAO W Y, BISCAIA H C, et al. Debonding analysis of FRP-to-concrete interfaces between two adjacent cracks in plated beams under temperature variations [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2022, 263: 108307. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2022.108307.
- [15] SONG Z P, ZHAO B, HE J H, et al. Modified gradient elasticity and its finite element method for shear boundary layer analysis [J]. *Mechanics Research Communications*, 2014, 62: 146-154. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2014.09.008.
- [16] 刘钰中. 外贴FRP加固梁中胶层应力的研究[D]. 长沙: 湖南大学, 2018.
LIU Yuzhong. Stress analysis of adhesive layer in FRP strengthened beams [D]. Changsha: Hunan University, 2018.
- [17] 吴凡, 吴攀, 彭晖, 等. 端部嵌贴CFRP加固混凝土结构有限元分析[J]. *交通科学与工程*, 2022, 38(4): 109-115. DOI: 10.3969/j.issn.1674-599X.2022.04.017.
WU Fan, WU Pan, PENG Hui, et al. Finite element analysis of concrete structure reinforced by terminal embedded the CFRP strips [J]. *Journal of Transport Science and Engineering*, 2022, 38(4): 109-115. DOI: 10.3969/j.issn.1674-599X.2022.04.017.

(责任编辑:彭三军;校对:刘平)