

文章编号:1672-9331(2021)01-0066-13

# 一种新的多输入多输出柔顺机构拓扑优化方法

荣见华<sup>1,2</sup>, 彭罗<sup>1,2</sup>, 易继军<sup>1,2</sup>, 曹浩<sup>1,2</sup>

(1. 长沙理工大学 汽车与机械工程学院, 湖南 长沙 410114;

2. 长沙理工大学 工程车辆轻量化与可靠性技术湖南省高校重点实验室, 湖南 长沙 410114)

**摘要:** 针对多输入多输出柔顺机构的输出位移最大化拓扑优化问题, 提出了一种新的拓扑优化求解方法。首先, 引入柔顺度的小量变化约束函数来处理柔顺机构拓扑优化的病态载荷问题和类铰链问题。基于传统界限公式法思路, 通过一个界限变量将多个输出位移最大化目标等效转化为多个约束条件, 构建了一种新的多输入多输出柔顺机构拓扑优化的界限公式模型。然后, 结合变体积约束限技术、密度过滤技术、Heaviside映射技术、固体各向同性材料插值方法及光滑对偶求解算法, 提出了一种新的多输入多输出柔顺机构拓扑优化方法。算例计算结果表明: 相对于现有方法, 本研究提出的方法获得的最终拓扑不仅清晰, 不含类铰链, 且具有更大的输出位移。

**关键词:** 多输入多输出柔顺机构; 拓扑优化; 界限公式法; 多目标优化

**中图分类号:** TH122

**文献标志码:** A

## A new topology optimization method for multi-input-multi-output compliant mechanisms

RONG Jian-hua<sup>1,2</sup>, PENG Luo<sup>1,2</sup>, YI Ji-jun<sup>1,2</sup>, CAO Hao<sup>1,2</sup>

(1. School of Automotive and Mechanical Engineering, Changsha University of Science & Technology,

Changsha 410114, China; 2. Key Laboratory of Lightweight and Reliability Technology for Engineering

Vehicle, College of Hunan Province, Changsha University of Science & Technology, Changsha 410114, China)

**Abstract:** A new topology optimization method was proposed to maximize the output displacements of multi-input-multi-output compliant mechanisms. Firstly, a constraint function on the small quantity change of the compliance was introduced to deal with the ill-conditioned loads and hinge-like problems of topological optimization of multi-input-multi-output compliant mechanisms. Based on the idea of the traditional bound formula method, a new bound formula model for topology optimization of multi-input-multi-output compliant mechanisms was constructed by equivalently transforming multiple output displacement maximization objectives into multiple constraints through a bound variable. Secondly, combining with the varied volume constraint scheme, density filtering technology, Heaviside mapping technology, solid isotropic material interpolation method and the smooth dual algorithm, a new topology optimization method for multi-input-multi-output compliant mechanisms was proposed. The calculating results of the examples show that, compared with

收稿日期: 2020-04-24

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11772070, 11372055); 中国建筑第五工程局有限公司科研项目(3030402)

通讯作者: 荣见华(1963—), 男, 教授, 主要从事结构动力学及优化方面的研究。E-mail: rongjhua@aliyun.com

the existing method, the final topology obtained by proposed method is not only clear, free of hinges, but also has a larger output displacement.

**Key words:** multi-input-multi-output compliant mechanism; topology optimization; bound formulation method; multi-objective optimization

柔顺机构是借助其内部构件的弹性形变来转化或传递能量、运动或载荷的机构<sup>[1]</sup>。而多输入多输出柔顺机构在实际工程中使用十分广泛。因此,研究多输入多输出柔顺机构拓扑优化方法具有重要的工程价值。然而,多输入多输出柔顺机构拓扑优化涉及类铰链问题、多个输出位移的最优化问题及数值计算的不稳定性问题、灰度问题等,目前还没有较好的综合解决上述所有问题的拓扑优化方法。本研究提出了一种解决上述所有问题的基于固体各向同性材料惩罚模型(solid isotropic material with penalization, SIMP)的柔顺机构拓扑优化方法。

SIMP 方法是目前应用最广泛的拓扑优化方法之一。传统的 SIMP 方法存在数值计算不稳定性问题,而 Bourdin<sup>[2]</sup>提出的密度过滤技术是一种很好的解决办法。但在引入密度过滤技术之后,又出现了灰度区域问题。对此,Sigmund 等<sup>[3]</sup>提出了将密度过滤技术、Heaviside 映射技术和 SIMP 方法相结合的三场(设计变量场、中间变量场和物理变量场)方案,综合解决了连续体结构拓扑优化的数值计算不稳定性问题和灰度问题。

早期的柔顺机构拓扑优化方法获取的优化结构都含有类铰链(单连接节点),容易发生应力集中现象<sup>[4]</sup>。出于制造考虑,对类铰链进行后处理通常会降低具有类铰链的柔顺机构优化设计的预期性能。针对柔顺机构拓扑优化的类铰链问题,国内外许多学者提出了各种各样的解决方案。Haber 等<sup>[5]</sup>、Yoon 等<sup>[6]</sup>和 Poulsen<sup>[7]</sup>分别提出了周长约束方法、多尺度小波拓扑优化方法和最小长度尺度约束方法来抑制类铰链的产生,但这 3 种方法不能完全解决类铰链的问题;Yin 等<sup>[8]</sup>利用两个对角有限元相对旋转角度的约束来抑制类铰链的产生,这大大增加了计算复杂度。斜度约束<sup>[9]</sup>、局部应力约束<sup>[10]</sup>和上限约束<sup>[8]</sup>也分别被引入到优化模型中以防止柔顺机构形成类铰链。Luo 等<sup>[11]</sup>设计了一种密度敏感度重复过滤方案来控制最终设计中的类铰链;Luo 等<sup>[12]</sup>通过在水平

集方法中引入图像分析使用的二次能量函数来解决柔顺机构拓扑优化的类铰链问题;Sigmund<sup>[13]</sup>采用密度滤波和 Heaviside 密度映射来优化柔顺机构的设计;Li 等<sup>[14]</sup>研究了用于控制类铰链并保持体积的 Heaviside 滤波方法。运用文献[13-14]中的方法可以得到具有良好 1/0 分布的最佳结构拓扑,但是不能有效避免最佳结构中的类铰链问题。Saxena 等<sup>[15]</sup>、De Lima 等<sup>[16]</sup>分别采用多边形有限元规避最佳结构中的类铰链问题;Wang 等<sup>[17]</sup>使用基于曲线对的方案表示几何结构,并通过遗传算法解决了无类铰链柔顺机构的设计问题;Lieu 等<sup>[18]</sup>通过在等几何分析框架中使用拓扑优化和高分辨率集成,提出了一个没有类铰链的逆变器机构示例。还有学者将基于应变的拓扑优化方法用于减少柔性接头的局部高应变,从而阻碍了类铰链的出现<sup>[19-24]</sup>。但是由于采用加权求和寻求最大位移来减少柔顺机构接头中的局部高应变,这在一定程度上降低了柔顺机构设计的预期性能。Rahmatalla 等<sup>[25]</sup>通过两组不同的人造弹簧模型提出了一种无类铰链的方法;Wang 等<sup>[26]</sup>提出了一种用于无类铰链柔顺机构拓扑优化设计的特征刚度模型;Sigmund<sup>[27]</sup>、Lazarov 等<sup>[28]</sup>提出使用腐蚀和扩张算子来模拟与柔顺机构制造相关的不确定性,这是在最坏情况下的设计问题,其结果没有类铰链,也没有灰色区域;Lazarov 等<sup>[29]</sup>进一步使用随机场建模,研究了几何不确定性的柔顺机构的拓扑优化设计,其结果也没有类铰链。近年来,涉及应力约束、制造不确定性和几何非线性柔顺机构的拓扑优化设计的研究较多<sup>[30-34]</sup>,也能解决多输入多输出柔顺机构拓扑优化的类铰链问题。但应力约束方案的缺点是在优化的早期迭代过程中,最大 Von-Mises 应力和结构体积会出现较大变化,且计算量较大。最近,陈成等<sup>[35]</sup>引入加权组合柔顺度的小量变化约束,并采用三场方案建立柔顺机构有限元模型和拓扑优化模型,获得了清晰且无类铰链的拓扑构型。

对于多输入多输出柔顺机构,机构多个输出

位移同时最大是一般工程追求的目标,这本质上是一个多目标优化问题<sup>[21]</sup>。目前,对于多输入多输出柔顺机构拓扑优化问题的研究较少,现有的研究大都采用线性加权和法<sup>[19-21,36]</sup>或自适应加权和法<sup>[37-38]</sup>,将机构多个输出位移最大化的多目标问题转化为单目标问题来解决。线性加权和法可以通过调整权重系数获得一系列 Pareto 最优解,但存在权重系数难以选择的问题;自适应加权和法构建了能自适应调整的权重系数,使各输出位移目标始终能被同等重要地考虑,解决了线性加权和法权重系数难以选择的问题,但也因此导致目标函数中各位移目标的权重系数在优化迭代早期过程中总是处于较大波动的状态,相邻迭代步之间同一位移目标的权重系数可能存在很大差异,从而影响了目标函数的连续性,进而影响了优化求解的最优性。界限公式法是另一种将多目标优化问题转化为单目标优化问题的有效方法<sup>[39]</sup>。Marler 等<sup>[40]</sup>、Jensen 等<sup>[41]</sup>、Du 等<sup>[42]</sup>和 Tsai 等<sup>[43]</sup>分别采用界限公式法研究了涉及频率的结构拓扑优化问题;俞燎宏等<sup>[44]</sup>将界限公式法引入到多工况载荷下连续体结构的柔顺度拓扑优化中,并取得了良好的效果。然而,界限公式法要求多个目标函数在优化过程中都为非负函数,但多输入多输出柔顺机构的多个输出位移函数在优化迭代过程中会发生正负转化。因此,需将多输入多输出柔顺机构拓扑优化问题的多个输出位移函数转化为等效的多个非负函数。数值模拟表明:在结构某优化迭代步产生类铰链时,至少有一个与多输入或多输出点相关的柔顺机构的柔顺度会发生巨大变化。为了便于应用界限公式法研究多个输出位移的最优化问题,本研究引入与多输入或多输出点相关的柔顺机构的柔顺度变化率约束来抑制类铰链的产生。

为综合解决数值计算的不稳定性问题、灰度问题、类铰链问题、病态载荷问题和多个输出位移最大化问题,本研究提出了一种新的多输入多输出柔顺机构拓扑优化方法。首先,基于密度过滤技术、Heaviside 映射技术和 SIMP 惩罚模型,建立了多输入多输出柔顺机构拓扑优化的一般模型;然后,基于界限公式法将多个位移最大化目标函数转化为多个等效非负约束函数,并引入简单且与多输入或多输出点相关的柔顺机构的柔顺度

变化率约束来抑制类铰链的产生,引入变体约束限技术<sup>[35]</sup>以保证结构构型能更稳健地变化,形成等效的多输入多输出柔顺机构的拓扑优化近似模型;最后,采用光滑对偶算法求解上述模型,并用两个算例对其进行了验证。

## 1 问题描述

### 1.1 过滤方法及材料模型

参考文献[3],采用密度过滤技术、Heaviside 映射技术和 SIMP 惩罚插值的三场方案,建立柔顺机构有限元模型和拓扑优化模型,以便解决基于 SIMP 方法的柔顺机构拓扑优化求解存在的数值不稳定性问题和灰度问题。

首先,将优化结构的设计域离散为  $N$  个单元,并给第  $e$  个单元赋予设计变量  $x_e$  和相对密度变量  $\tilde{x}_e$ 。相对密度变量  $\tilde{x}_e$  的表达式为:

$$\tilde{x}_e = \frac{\sum_{q \in N_e} v_q^{(0)} w_{e,q}(\mathbf{x}) x_q}{\sum_{q \in N_e} v_q^{(0)} w_{e,q}(\mathbf{x})} \quad (1)$$

式中:  $N_e = \{q \mid \|y_q - y_e\| \leq r_{\min}\}$ ,  $y_q$  和  $y_e$  分别为第  $q$  个设计变量所属单元的中心位置和第  $e$  个单元的中心位置,  $r_{\min}$  为设定的实体材料密度过滤最小半径;  $v_q^{(0)}$  为第  $q$  个单元充满材料时的体积;  $w_{e,q}$  为材料密度的加权函数。加权函数一般分为线性和常数加权函数,本研究均使用常数加权函数,以确保在采用 Heaviside 密度映射时优化求解的收敛性。 $w_{e,q}$  的具体表达式为:

$$w_{e,q}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & q \in N_e \\ 0, & q \notin N_e \end{cases} \quad (2)$$

然后,为了获得清晰的结构拓扑优化解,采用 Guest 等<sup>[45]</sup>提出的光滑 Heaviside 函数,形成设计变量场  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ 、过渡变量场  $\tilde{\mathbf{x}} = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_N\}$  和物理变量场  $\bar{\mathbf{x}} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N\}$ 。在材料插值时,用物理变量  $\bar{x}_e$  替代原有的相对密度变量  $\tilde{x}_e$ :

$$\bar{x}_e = 1 - e^{-\beta \tilde{x}_e} + \tilde{x}_e e^{-\beta} \quad (3)$$

式中:  $\beta$  为曲率参数,本研究所有算例中  $\beta$  的初始值为 1,此后每 50 迭代步将  $\beta$  更新为原来的 2 倍。

最后,采用 SIMP 方法进行材料插值,通过下

式获得单元体积和刚度矩阵:

$$V_e = f_V(\bar{x}_e) v_e^{(0)}, \bar{\mathbf{K}}_e = f_K(\bar{x}_e) \bar{\mathbf{K}}_e^{(0)} \quad (4)$$

式中:  $V_e$  为第  $e$  个单元的体积;  $\bar{\mathbf{K}}_e$ 、 $\bar{\mathbf{K}}_e^{(0)}$  分别为第  $e$  个单元的刚度矩阵和固有刚度矩阵;  $f_K(\bar{x}_e)$  为刚度矩阵的惩罚函数,且  $f_K(\bar{x}_e) = E_{\min} + \bar{x}_e^p (E_0 - E_{\min})$ , 其中  $E_0$  为材料杨氏模量,  $E_{\min}$  是一个小量,用来避免刚度矩阵的奇异,  $p$  为惩罚参数;  $f_V(\bar{x}_e)$  表示单元体积插值函数,可表示为  $f_V(\bar{x}_e) = [\zeta_1 + (1 - \zeta_1)\bar{x}_e]^{\alpha_v}$ ,  $\alpha_v$  为单元体积惩罚指数,以保证  $f_V(\bar{x}_e)$  对物理变量  $\bar{x}_e$  的二阶导数不为 0。在本研究的算例中,取  $E_{\min} = 10^{-9} E_0$ ,  $p$  采用连续逐步增大的方式进行结构优化求解,即在迭代开始时取  $p = 1$ ,在迭代过程中每迭代步  $p$  增加 0.01,并逐渐增加到 3,而后保持不变;  $\alpha_v = 1.15$ ,  $\zeta_1$  为一个小的常数,取  $\zeta_1 = 10^{-5}$ ,用以保证对于任意的  $0 \leq \bar{x}_e \leq 1$ ,  $f_V(\bar{x}_e)$  对物理变量  $\bar{x}_e$  的二阶导数不产生奇异。

## 1.2 一般模型

如图 1 所示,  $\Omega$  为给定的多输入多输出问题的设计域;  $P_{in,j}$  为驱动输入点;  $F_{in,j}$  为对应的输入力;  $P_{out,j}$  为位移输出点;  $u_{out,j}$  为在输入力  $F_{in,j}$  单独作用下机构输出点  $P_{out,j}$  的期望方向位移;  $n$  为输入(或输出)的总数;  $k_{in,j}$  和  $k_{out,j}$  为输入输出模拟刚度<sup>[46]</sup>;  $j = 1, 2, \dots, n$ 。

假定  $C_{in,j}(\mathbf{x})$  表示在输入力  $F_{in,j}$  单独作用下机构的应变能,又称为机构实载柔顺度;  $C_{out,j}(\mathbf{x})$

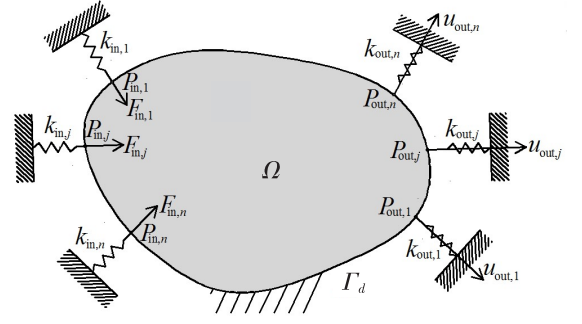


图 1 多输入多输出柔顺机构示意图

Fig. 1 Schematic diagram of multi-input-multi-output compliant mechanism

表示在机构输出点  $P_{out,j}$  单独作用了一个与期望位移方向相同的单位虚载  $F_{v,j}$  时机机构的应变能,又称为机构虚载柔顺度。其表达式为:

$$\begin{cases} C_{in,j}(\mathbf{x}) = \mathbf{U}_j^T \mathbf{K} \mathbf{U}_j \\ C_{out,j}(\mathbf{x}) = \mathbf{V}_j^T \mathbf{K} \mathbf{V}_j \end{cases} \quad (5)$$

式中:  $\mathbf{U}_j$  为在输入力  $F_{in,j}$  单独作用时机机构的位移矢量;  $\mathbf{V}_j$  为在单位虚载  $F_{v,j}$  单独作用时机机构的位移矢量;  $\mathbf{K}$  为由单元刚度矩阵  $\bar{\mathbf{K}}_e$  ( $e = 1, 2, \dots, N$ ) 组装得到的整体刚度矩阵;  $j = 1, 2, \dots, n$ 。

$u_{out,j}$  可用互应变能  $C_{m,j}(\mathbf{x})$  计算,其表达式如下:

$$u_{out,j} = C_{m,j}(\mathbf{x}) = \mathbf{V}_j^T \mathbf{K} \mathbf{U}_j, j = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

本研究的目标是在输入力  $F_{in,j}$  单独作用下机构输出点  $P_{out,j}$  的期望方向输出位移  $C_{m,j}(\mathbf{x})$  同时最大,即  $\max C_{m,j}(\mathbf{x})$ 。当不采用阻止单节点类铰链出现的技术时,多输入多输出柔顺机构的优化模型可表示为:

$$\begin{cases} \max C_{m,j}(\mathbf{x}), j = 1, 2, \dots, n \\ \text{s. t.} \quad V_1(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^N [\zeta_1 + (1 - \zeta_1)\bar{x}_e(\mathbf{x})]^{\alpha_v} v_e^{(0)} / V^{(0)} - V^* / V^{(0)} \leq 0 \\ V_2(\mathbf{x}) = - \sum_{e=1}^N [\zeta_1 + (1 - \zeta_1)\bar{x}_e(\mathbf{x})]^{\alpha_v} v_e^{(0)} / V^{(0)} + (1 - \theta) V^* / V^{(0)} \leq 0 \\ 0 \leq x_q \leq 1, q = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (7)$$

式中:  $V^*$  为目标结构体积;  $\theta$  为体积下限控制因子,取值为 0.003~0.020,本研究未做特别说明则其取值为 0.01;  $V^{(0)}$  为结构初始体积。约束条件  $V_1(\mathbf{x}) \leq 0$  和  $V_2(\mathbf{x}) \leq 0$  以稍紧的方式提供了结构体积的近似等式约束。

## 1.3 基于界限公式法的拓扑优化模型

设  $C_{m,j}^*(\mathbf{x}^{(0)}) = \gamma_1 |C_{ratio,j}| \cdot |C_{m,j}(\mathbf{x}^{(0)})|$ 。其中,  $|C_{ratio,j}|$  表示在优化过程中仅在第  $j$  个输入载荷作用时柔顺机构的第  $j$  个输出位移绝对值的最大值与初始值之比。为了减少寻找多个单输



人和单输出柔顺机构最优解的计算成本,可采用线性加权和法或自适应加权和法试算一次,确定  $|C_{ratio,j}|$  的近似值。试算后可获得该多输入多输出柔顺机构的优化历史信息,找到该历史信息的每个输出位移的最大绝对值  $|C_{max,j}|$ 。然后,每个  $|C_{ratio,j}|$  近似用  $|C_{max,j}|/|C_{m,j}(\mathbf{x}^{(0)})|$  替换。经验参数  $\gamma_1$  在区间  $[1.8, 2.2]$  内取值。优化模型式(7)为一个多目标优化问题,通过极大极小值法可以将式(7)中的目标函数转化为最大目标最小化函数:

$$\min \max_{j=1,2,\dots,n} \left( -\frac{C_{m,j}(\mathbf{x})}{C_{m,j}^*} \right) \quad (8)$$

1983年,Bendsøe<sup>[39]</sup>提出了界限公式法,用于处理极大极小值的优化问题;Marler等<sup>[40]</sup>、Jensen

等<sup>[41]</sup>、Du等<sup>[42]</sup>和Tsai等<sup>[43]</sup>分别采用界限公式法研究了涉及频率的结构拓扑优化问题;俞燎宏等<sup>[44]</sup>将界限公式法引入到多工况载荷下连续体结构的柔顺度拓扑优化中,并取得了良好的效果。数值算例表明:该界限公式法成功的关键是在每一迭代步优化模型中确保结构特性函数稳健变化,同时确保目标函数为非负函数。可找到一足够大的正常数  $C$ ,确保各目标函数非负。为确保结构特性函数稳健变化,同时抑制柔顺机构类铰链的产生,借鉴陈成等<sup>[35]</sup>的研究思路,增加柔顺度小量变化的要求,对机构的实载柔顺度  $C_{in}(\mathbf{x})$  和虚载柔顺度  $C_{out}(\mathbf{x})$  进行分开约束,并引入变体积限技术,可将式(8)转化为下式:

$$\begin{cases} \min \max_{j=1,2,\dots,n} \left( Z_j(\mathbf{x}) = C - \frac{C_{m,j}(\mathbf{x})}{C_{m,j}^*} \right) \\ \text{s. t. } \phi_j(\mathbf{x}) = \frac{C_{in,j}(\mathbf{x}) - C_{in,j}(\mathbf{x}^{(k-1)})}{C_{in,j}(\mathbf{x}^{(k-1)})} - \varepsilon_1 \leq 0, j=1,2,\dots,n \\ \zeta_j(\mathbf{x}) = \frac{C_{out,j}(\mathbf{x}) - C_{out,j}(\mathbf{x}^{(k-1)})}{C_{out,j}(\mathbf{x}^{(k-1)})} - \varepsilon_1 \leq 0, j=1,2,\dots,n \end{cases} \quad (9)$$

$$V_1(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^N [\zeta_1 + (1 - \zeta_1) \bar{x}_e]^{a_v} v_e^{(0)} / V^{(0)} - V_U^{(k)} / V^{(0)} \leq 0$$

$$V_2(\mathbf{x}) = - \sum_{e=1}^N [\zeta_1 + (1 - \zeta_1) \bar{x}_e]^{a_v} v_e^{(0)} / V^{(0)} + (1 - \theta) V_U^{(k)} / V^{(0)} \leq 0$$

$$0 \leq x_q \leq 1, q=1,2,\dots,N$$

$$V_U^{(k)} = \begin{cases} V^{(k-1)} - \min(\gamma_2 V^{(0)}, |V^* - V^{(k-1)}|), & V^{(k)} \geq V^* \\ V^{(k-1)} + \min(\gamma_2 V^{(0)}, |V^* - V^{(k-1)}|), & V^{(k)} < V^* \end{cases}, k=1 \text{ 或 } k \in B \quad (10a)$$

$$V_U^{(k)} = \begin{cases} \max((V_U^{(k-1)} - \gamma_2 V^{(0)}), V^*), & V^{(k-1)} \geq V^* \\ \min((V_U^{(k-1)} + \gamma_2 V^{(0)}), V^*), & V^{(k-1)} < V^* \end{cases}, k \notin B \text{ 且 } k=2,3,\dots \quad (10b)$$

式中:  $\varepsilon_1$  为凝聚柔顺度小量变化控制参数,取值为  $0.001 \sim 0.020$ ,本研究未做特别说明则  $\varepsilon_1$  取值为  $0.003$ ;  $C$  为常数,取值为  $1$ ;  $V^{(k)}$  为第  $k$  个外循环迭代步的结构总体积;  $V_U^{(k)}$  为第  $k$  个外循环迭代步的目标结构总体积;经验参数  $\gamma_2$  为变体积限的步长,取值为  $0.01 \sim 0.05$ ;  $B$  为 Heaviside 过滤速率参数  $\beta$  变化后,前三个迭代步编号的集合。

借鉴文献[44]的界限公式法,引入界限变量  $\alpha (\alpha > 0)$  将式(10)中多个目标函数转化为约束条件,再引入  $\alpha$  的二次函数  $s(\alpha) = \alpha + \alpha^2$  作为目标

函数。这样,式(9)就转化为下式:

$$\begin{cases} \min s(\alpha) = \alpha + \alpha^2 \\ \text{s. t. } Z_j(\mathbf{x}) - \alpha \leq 0, j=1,2,\dots,n \\ \phi_j(\mathbf{x}) \leq 0, j=1,2,\dots,n \\ \zeta_j(\mathbf{x}) \leq 0, j=1,2,\dots,n \\ V_1(\mathbf{x}) \leq 0 \\ V_2(\mathbf{x}) \leq 0 \\ 0 \leq x_q \leq 1, q=1,2,\dots,N \\ \alpha > 0 \end{cases} \quad (11)$$

式(11)目标函数及柔顺度约束的整体功能与式(9)目标函数的功能是完全等效的,不同之处在

于前者将多目标优化问题转化成了单目标优化问题。同时,采用二次函数  $s(\alpha) = \alpha + \alpha^2$  作为目标函数,可直接得到  $\alpha$  与优化模型的拉格朗日乘子的显式关系式。

## 2 拓扑优化近似模型

对于具有大量设计变量且约束条件少于 100 个的优化问题,对偶算法可以极大地减少计算量。据此,俞燎宏等<sup>[44]</sup>提出了一种改进的光滑对偶二

次规划算法,用于解决同时具有大量设计变量和界限变量的类似式(11)的问题。采用文献[44]的方法求解,需先求解式(11)中各约束函数对设计变量的一阶导数(即灵敏度)和二阶近似导数,获得式(11)中各约束函数的二阶泰勒近似式,然后再将式(11)转化为二阶泰勒展开的近似模型。

### 2.1 灵敏度计算

依据式(9),与目标函数及约束函数相关的结构性能函数对任意物理变量  $\bar{x}_e$  ( $e = 1, 2, \dots, N$ ) 的一阶导数可表示为:

$$\frac{\partial Z_j(\mathbf{x})}{\partial \bar{x}_e} = -\frac{\partial C_{m,j}(\mathbf{x})}{\partial \bar{x}_e} / C_{m,j}^* = -p \bar{x}_e^{(p-1)} (E_0 - E_{\min}) \mathbf{V}_j^T \mathbf{K}_e^{(0)} \mathbf{U}_j / C_{m,j}^*, j = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

$$\frac{\partial \phi_j(\mathbf{x})}{\partial \bar{x}_e} = \frac{\partial C_{in,j}(\mathbf{x})}{\partial \bar{x}_e} / C_{in,j}(\mathbf{x}^{(k-1)}) = -p (E_0 - E_{\min}) \bar{x}_e^{(p-1)} \mathbf{U}_j^T \mathbf{K}_e^{(0)} \mathbf{U}_j / C_{in,j}(\mathbf{x}^{(k-1)}), j = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

$$\frac{\partial \zeta_j(\mathbf{x})}{\partial \bar{x}_e} = \frac{\partial C_{out,j}(\mathbf{x})}{\partial \bar{x}_e} / C_{out,j}(\mathbf{x}^{(k-1)}) = -p (E_0 - E_{\min}) \bar{x}_e^{(p-1)} \mathbf{V}_j^T \mathbf{K}_e^{(0)} \mathbf{V}_j / C_{out,j}(\mathbf{x}^{(k-1)}), j = 1, 2, \dots, n \quad (14)$$

$$\frac{\partial V_1(\mathbf{x})}{\partial \bar{x}_e} = \alpha_v (1 - \zeta_1) [\zeta_1 + (1 - \zeta_1) \bar{x}_e]^{(\alpha_v-1)} / V^{(0)} \quad (15)$$

$$\frac{\partial V_2(\mathbf{x})}{\partial \bar{x}_e} = -\alpha_v (1 - \zeta_1) [\zeta_1 + (1 - \zeta_1) \bar{x}_e]^{(\alpha_v-1)} / V^{(0)} \quad (16)$$

依据式(12)~(16),可获得式(11)中各约束函数相对于独立设计变量  $x_q$  ( $q = 1, 2, \dots, N$ ) 的一阶导数。根据链式求导法则,任意给定函数  $f(\mathbf{x})$  对  $x_q$  的偏导数可表示为:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_q} = \sum_{e \in N_q} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \bar{x}_e} \cdot \frac{\partial \bar{x}_e}{\partial x_q} \cdot \frac{\partial \tilde{x}_e}{\partial x_q}, q = 1, 2, \dots, N \quad (17)$$

式中:

$$\frac{\partial \bar{x}_e}{\partial \tilde{x}_e} = \beta e^{-\beta \tilde{x}_e} + e^{-\beta} \quad (18)$$

$$\frac{\partial \tilde{x}_e}{\partial x_q} = \frac{w_{e,q}}{\sum_{i \in N_e} w_{e,i}} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_j(\mathbf{x}) &= Z_j(\mathbf{x}^{(k-1)}) + \sum_{q=1}^N \bar{P}_{j,q}^{(k)} \left( \frac{1}{U_q^{(k)} - x_q} - \frac{1}{U_q^{(k)} - x_q^{(k-1)}} \right) + \\ &\sum_{q=1}^N \bar{Q}_{j,q}^{(k)} \left( \frac{1}{x_q - L_q^{(k)}} - \frac{1}{x_q^{(k-1)} - L_q^{(k)}} \right), j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (20)$$

### 2.2 约束函数近似表达式

式(11)中各约束函数对设计变量的二阶导数难以直接求得,且其具有局部非凸性。故先在第  $k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) 个外循环迭代步采用移动渐近线方法(method of moving asymptotes, MMA)<sup>[47]</sup>将式(11)中的各约束函数近似展开,得到各约束函数的 MMA 近似式;然后,再求得各约束函数 MMA 近似式对设计变量的二阶导数;最后,基于得到的各约束函数的函数值、一阶导数和二阶近似导数,构建各约束函数二阶泰勒近似展开式。研究表明:采用这种方式获得的函数近似表达式不仅具有较高的近似度,且能保证函数的全局凸性<sup>[44]</sup>。

位移性能函数  $Z_j(\mathbf{x})$  的 MMA 近似展开式可表示为:

$$\bar{P}_{j,q}^{(k)} = (U_q^{(k)} - x_q^{(k-1)})^2 \left( 1.001 \frac{\partial Z_j(\mathbf{x})}{\partial x_q} \right)^+ + 0.001 \left( \frac{\partial Z_j(\mathbf{x})}{\partial x_q} \right)^- + \frac{\chi_q}{x_q^{\max} - x_q^{\min}} \quad (21)$$

$$\bar{Q}_{j,q}^{(k)} = (x_q^{(k-1)} - L_q^{(k)})^2 \left( 0.001 \frac{\partial Z_j(\mathbf{x})}{\partial x_q} \right)^+ + 1.001 \left( \frac{\partial Z_j(\mathbf{x})}{\partial x_q} \right)^- + \frac{\chi_q}{x_q^{\max} - x_q^{\min}} \quad (22)$$

式中:  $x_q^{\max}$  和  $x_q^{\min}$  为  $x_q$  的上限和下限;  $x_q^{(k-1)}$  为第  $k-1$  个外循环迭代步结构第  $q$  个单元的设计变量;  $\mathbf{x}^{(k-1)}$  为由  $x_q^{(k-1)}$  ( $q=1,2,\dots,N$ ) 构成的向量;  $\left( \frac{\partial Z_j(\mathbf{x})}{\partial x_q} \right)^+$  为  $\max\left(0, \frac{\partial Z_j(\mathbf{x})}{\partial x_q}\right)$ ;  $\left( \frac{\partial Z_j(\mathbf{x})}{\partial x_q} \right)^-$  为  $\max\left(0, -\frac{\partial Z_j(\mathbf{x})}{\partial x_q}\right)$ ;  $\chi_q$  ( $q=1,2,\dots,N$ ) 是小的正常数,取值为  $10^{-9}$ ;  $U_q^{(k)}$ 、 $L_q^{(k)}$  分别为第  $k$  个外循环迭代步对应的第  $q$  个设计变量的移动渐近线的上限和下限。

由式(20)可得  $\tilde{Z}_j(\mathbf{x})$  对设计变量  $x_q$  的二阶导数为:

$$\frac{\partial^2 \tilde{Z}_j(\mathbf{x}^{(k-1)})}{\partial (x_q)^2} \approx \frac{2\bar{P}_{j,q}^{(k)}}{(U_q^{(k)} - x_q^{(k-1)})^3} + \frac{2\bar{L}_{j,q}^{(k)}}{(x_q^{(k-1)} - L_q^{(k)})^3} \quad (23)$$

$\partial^2 \tilde{Z}_j(\mathbf{x})/\partial (x_q)^2$  可能为负值,意味着  $\tilde{Z}_j(\mathbf{x})$  的二阶泰勒展开式在某些设计点是关于拓扑变量

的非凸函数。因此,需要用正的经验值取代负值来保证函数的凸性,将式(23)改写为:

$$\frac{\partial^2 \tilde{Z}_j(\mathbf{x}^{(k-1)})}{\partial (x_q)^2} \approx \max \left\{ \left[ \frac{2\bar{P}_{j,q}^{(k)}}{(U_q^{(k)} - x_q^{(k-1)})^3} + \frac{2\bar{L}_{j,q}^{(k)}}{(x_q^{(k-1)} - L_q^{(k)})^3} \right], \varphi_q |Z_j(\mathbf{x}^{(k-1)})| \right\} \quad (24)$$

式中:  $\varphi_q = 10^{-6}$ ;  $q=1,2,\dots,N$ 。

根据式(20)和式(24),  $Z_j(\mathbf{x})$  的二阶泰勒展开式可表示为:

$$\begin{aligned} \bar{Z}_j(\mathbf{x}) \approx & Z_j(\mathbf{x}^{(k-1)}) + \sum_{q=1}^N \left[ \frac{\partial Z_j(\mathbf{x}^{(k-1)})}{\partial x_q} (x_q - x_q^{(k-1)}) \right] + \\ & \frac{1}{2} \sum_{q=1}^N \left[ \frac{\partial^2 \tilde{Z}_j(\mathbf{x}^{(k-1)})}{\partial (x_q)^2} (x_q - x_q^{(k-1)})^2 \right] \end{aligned} \quad (25)$$

同理,采用 MMA 方法将  $\psi_j(\mathbf{x})$ 、 $\zeta_j(\mathbf{x})$ 、 $V_1(\mathbf{x})$  和  $V_2(\mathbf{x})$  展开得到  $\tilde{\psi}_j(\mathbf{x})$ 、 $\tilde{\zeta}_j(\mathbf{x})$ 、 $\tilde{V}_1(\mathbf{x})$  和  $\tilde{V}_2(\mathbf{x})$ ,再用二阶泰勒展开式近似为:

$$\bar{\psi}_j(\mathbf{x}) \approx \psi_j(\mathbf{x}^{(k-1)}) + \sum_{q=1}^N \left[ \frac{\partial \psi_j(\mathbf{x}^{(k-1)})}{\partial x_q} (x_q - x_q^{(k-1)}) \right] + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^N \left[ \frac{\partial^2 \tilde{\psi}_j(\mathbf{x}^{(k-1)})}{\partial (x_q)^2} (x_q - x_q^{(k-1)})^2 \right] \quad (26)$$

$$\bar{\zeta}_j(\mathbf{x}) \approx \zeta_j(\mathbf{x}^{(k-1)}) + \sum_{q=1}^N \left[ \frac{\partial \zeta_j(\mathbf{x}^{(k-1)})}{\partial x_q} (x_q - x_q^{(k-1)}) \right] + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^N \left[ \frac{\partial^2 \tilde{\zeta}_j(\mathbf{x}^{(k-1)})}{\partial (x_q)^2} (x_q - x_q^{(k-1)})^2 \right] \quad (27)$$

$$\bar{V}_1(\mathbf{x}) \approx V_1(\mathbf{x}^{(k-1)}) + \sum_{q=1}^N \left[ \frac{\partial V_1(\mathbf{x}^{(k-1)})}{\partial x_q} (x_q - x_q^{(k-1)}) \right] + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^N \left[ \frac{\partial^2 \tilde{V}_1(\mathbf{x}^{(k-1)})}{\partial (x_q)^2} (x_q - x_q^{(k-1)})^2 \right] \quad (28)$$

$$\bar{V}_2(\mathbf{x}) \approx V_2(\mathbf{x}^{(k-1)}) + \sum_{q=1}^N \left[ \frac{\partial V_2(\mathbf{x}^{(k-1)})}{\partial x_q} (x_q - x_q^{(k-1)}) \right] + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^N \left[ \frac{\partial^2 \tilde{V}_2(\mathbf{x}^{(k-1)})}{\partial (x_q)^2} (x_q - x_q^{(k-1)})^2 \right] \quad (29)$$

式(26)~(29)中:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\psi}_j(\mathbf{x}^{(k-1)})}{\partial (x_q)^2} \approx \max \left\{ \left[ \frac{2\bar{P}_{n+j,q}^{(k)}}{(U_q^{(k)} - x_q^{(k-1)})^3} + \frac{2\bar{L}_{n+j,q}^{(k)}}{(x_q^{(k-1)} - L_q^{(k)})^3} \right], \varphi_q |\psi_j(\mathbf{x}^{(k-1)})| \right\} \quad (30)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\zeta}_j(\mathbf{x}^{(k-1)})}{\partial (x_q)^2} \approx \max \left\{ \left[ \frac{2\bar{P}_{2n+j,q}^{(k)}}{(U_q^{(k)} - x_q^{(k-1)})^3} + \frac{2\bar{L}_{2n+j,q}^{(k)}}{(x_q^{(k-1)} - L_q^{(k)})^3} \right], \varphi_q |\zeta_j(\mathbf{x}^{(k-1)})| \right\} \quad (31)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{V}_1(\mathbf{x}^{(k-1)})}{\partial (x_q)^2} \approx \max \left\{ \left[ \frac{2\bar{P}_{3n+1,q}^{(k)}}{(U_q^{(k)} - x_q^{(k-1)})^3} + \frac{2\bar{L}_{3n+1,q}^{(k)}}{(x_q^{(k-1)} - L_q^{(k)})^3} \right], \varphi_q \left( \frac{V^{(k-1)}}{V_0} \right) \right\} \quad (32)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{V}_2(\mathbf{x}^{(k-1)})}{\partial (x_q)^2} \approx \max \left\{ \left[ \frac{2\bar{P}_{3n+2,q}^{(k)}}{(U_q^{(k)} - x_q^{(k-1)})^3} + \frac{2\bar{L}_{3n+2,q}^{(k)}}{(x_q^{(k-1)} - L_q^{(k)})^3} \right], \varphi_q \left( \frac{V^{(k-1)}}{V_0} \right) \right\} \quad (33)$$

### 2.3 近似模型

根据式(25)~(29),可将式(11)的拓扑优化模型近似表达为:

$$\begin{cases} \min & s(\alpha) = \alpha + \alpha^2 \\ \text{s. t.} & \bar{Z}_j(\mathbf{x}) - \alpha \leq 0, j = 1, 2, \dots, n \\ & \bar{\psi}_j(\mathbf{x}) \leq 0, j = 1, 2, \dots, n \\ & \bar{\zeta}_j(\mathbf{x}) \leq 0, j = 1, 2, \dots, n \\ & \bar{V}_1(\mathbf{x}) \leq 0 \\ & \bar{V}_2(\mathbf{x}) \leq 0 \\ & 0 \leq x_q \leq 1, q = 1, 2, \dots, N \\ & \alpha > 0 \end{cases} \quad (34)$$

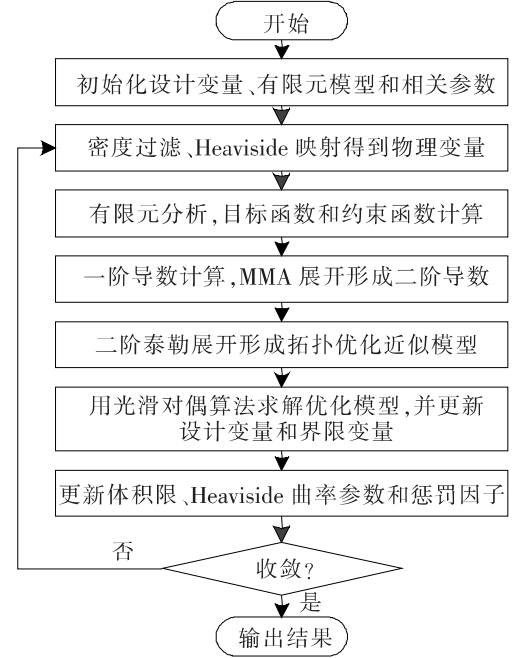


图 2 优化求解流程图

Fig. 2 Flow chart for optimization solution

### 3 收敛条件和结构优化迭代步骤

将式(34)中的拉格朗日函数对  $\alpha$  求一阶导数可得:

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \alpha} = 1.0 + 2\alpha - \sum_{l=1}^n \lambda_l \quad (35)$$

式中:  $\lambda_l (l=1, 2, \dots, n)$  为式(34)对偶式对应的拉格朗日乘子。

令  $\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) / \partial \alpha = 0$ , 可得:

$$\alpha = \frac{1}{2} \left( \sum_{l=1}^n \lambda_l - 1.0 \right) \quad (36)$$

采用光滑对偶算法优化迭代求解式(34)的拉格朗日乘子与设计变量,具体求解步骤可参考文献[44]。当满足下列收敛条件之一时,外循环迭代中止。

$$\max_{q=1,2,\dots,N} |x_q^{(k)} - x_q^{(k-1)}| \leq 0.001 \quad (37)$$

$$m_d = \sum_{e=1}^N \frac{4\bar{x}_e(1-\bar{x}_e)}{N} \leq 0.001 \quad (38)$$

结构优化迭代的过程如图 2 所示。

### 4 优化算例

#### 4.1 两输入两输出柔顺机构

图 3 为一个两输入两输出柔顺机构设计域,结构区域尺寸为  $200 \text{ mm} \times 200 \text{ mm} \times 2 \text{ mm}$ 。材料弹性模量  $E_0 = 1 \text{ N/mm}^2$ ,泊松比为 0.3,目标体积比为 0.4,输入力  $F_{\text{in},1} = 1000 \text{ N}$ ,  $F_{\text{in},2} = 1 \text{ N}$ ,弹簧刚度  $k_{\text{in},1} = k_{\text{in},2} = 0.3 \text{ N/mm}$ ,  $k_{\text{out},1} = k_{\text{out},2} = 0.1 \text{ N/mm}$ 。本算例涉及病态载荷问题(不同输

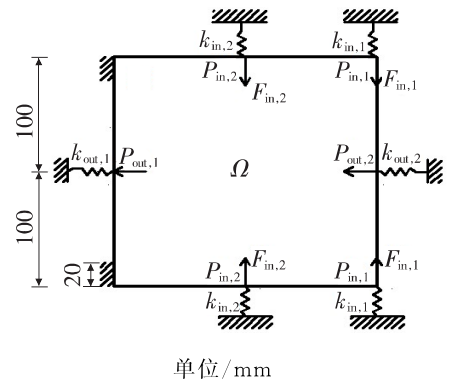


图 3 两输入两输出柔顺机构设计域  
Fig. 3 Design domain of two-input-two-output compliant mechanism



入载荷之间存在数量级差异,导致输出点不同)。将结构设计域划分为  $100 \times 100$  个有限元网格,即 10 000 个 4 节点平面应力单元网格。初始设计变量  $x_q^{(0)} = 0.4 (q = 1, 2, \dots, N)$ , 过滤半径  $r_{\min} = 3 \text{ mm}$ , 经验参数  $\gamma_2 = 0.03$ 。

为了检验界限公式法相对于线性加权和法及自适应加权和法的优越性,同时为了获取本研究算法需要的各  $|C_{\text{ratio},j}|$  的值,借鉴文献[36],采用线性加权和法将多目标优化问题转化为单目标优化问题并求解。线性加权和法处理病态载荷问题时存在计算困难,即在多个输出点输出了可能有几个数量级差异的位移,由此可能导致数量级大的优化目标完全支配数量级小的优化目标<sup>[21]</sup>。故将式(9)中的目标函数改为式(39)的单目标最小化问题以消除数量级差异,并形成多目标线性加权的柔顺机构优化问题。仍然采用三场方案进行过滤和材料插值,用 MMA 近似和二阶泰勒展开构造函数近似表达式,并用光滑对偶的二次规划算法求解,将该方法称为方法 1。另外,借鉴文献[37],基于自适应加权和法将式(9)中的目标函数改为式(40),再采用类似算法求解,将该方法称为方法 2。

$$\min \left( - \sum_i^n \sum_j^n \omega_j^{(i)} s_j^{(i)} C_{m,j}^{(i)}(\mathbf{x}) \right) \quad (39)$$

式中:  $C_{m,j}^{(i)}(\mathbf{x}) = \mathbf{V}_i^T \mathbf{K} \mathbf{U}_j$  为在  $F_{\text{in},i}$  单独作用下机构输出点  $P_{\text{out},j}$  的期望方向位移;  $\omega_j^{(i)}$  为权重因子,且  $\sum_i^n \sum_j^n \omega_j^{(i)} = 1$ ;  $s_j^{(i)}$  为标度因子,目的是让每个  $\omega_j^{(i)} s_j^{(i)} C_{m,j}^{(i)}(\mathbf{x})$  具有相同数量级,本算例中取  $s_1^{(1)} = s_2^{(1)} = 1, s_1^{(2)} = s_2^{(2)} = 1\ 000$ 。

$$\min \left( - \sum_{j=1}^n \tilde{\omega}_j C_{m,j}(\mathbf{x}) \right) \quad (40)$$

式中:  $\tilde{\omega}_j = |C_{m,1}(\mathbf{x}^{(k-1)}) / C_{m,j}(\mathbf{x}^{(k-1)})|$  为自适应权重因子,目的是让  $\tilde{\omega}_j C_{m,j}(\mathbf{x})$  与  $C_{m,1}(\mathbf{x})$  的数量级相同;  $j = 2, 3, \dots, n$ 。

当采用不同权重因子组合时,线性加权和法获得的两输入两输出优化柔顺机构的输出位移见表 1。图 4 为与表 1 相对应的优化拓扑构型。

表 1 方法 1 获得的两输入两输出优化

柔顺机构的输出位移

Table 1 Output displacements of two-input-two-output optimal compliant mechanism obtained by method 1

组合	$u_{\text{out},1} / \text{mm}$	$u_{\text{out},2} / \text{mm}$	$\omega_1^{(1)}$	$\omega_2^{(1)}$	$\omega_1^{(2)}$	$\omega_2^{(2)}$
1	174.982 6	0.695 3	0.30	0.20	0.20	0.30
2	374.477 7	0.721 9	0.35	0.15	0.15	0.35
3	463.589 6	0.691 6	0.60	0.00	0.00	0.40
4	717.804 7	0.655 8	0.70	0.00	0.00	0.30

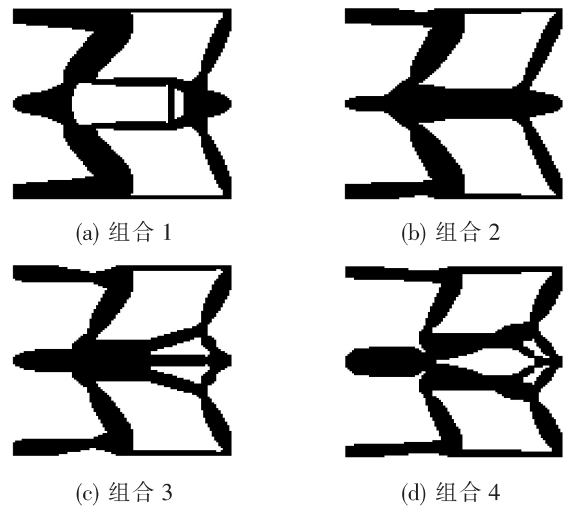


图 4 与表 1 相对应的优化拓扑构型

Fig. 4 Optimal topology configurations corresponding to table 1

表 1 和图 4 表明:方法 1 可获得清晰且不含类铰链的最终拓扑构型。但权重因子组合不同,最终获得的拓扑构型也有所不同。

图 5 给出了采用方法 2 获得的两输入两输出柔顺机构优化构型。在两输入载荷下,最优拓扑对应的期望方向的输出位移分别为  $u_{\text{out},1} = 499.24 \text{ mm}$  和  $u_{\text{out},2} = 0.761 2 \text{ mm}$ 。由图 5 可以看出,方法 2 也可获得清晰且不含类铰链的最终拓扑构型。



图 5 方法 2 获得的两输入两输出柔顺机构优化构型

Fig. 5 Optimal configuration of two-input-two-output compliant mechanism obtained by method 2

由方法 2 获得  $|C_{\max,j}|$  及  $|C_{m,j}(\mathbf{x}^{(0)})|$ , 并计算得到  $|C_{\text{ratio},1}| \approx 51.73$  及  $|C_{\text{ratio},2}| \approx 45.61$ 。取  $C=1, \gamma_1=2$ , 采用本研究方法对两输入两输出柔顺机构进行拓扑优化, 其结构优化历程如图 6 所示。最终的拓扑优化构型见图 6(h), 对应的输出位移分别为  $u_{\text{out},1} = 953.37 \text{ mm}$  和  $u_{\text{out},2} = 0.8013 \text{ mm}$ 。

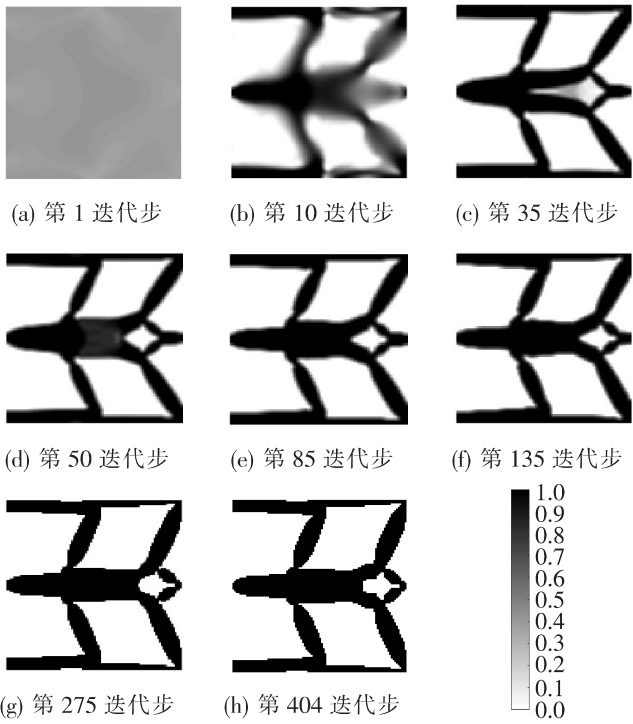


图 6 本方法获得的两输入两输出柔顺机构的优化历程

Fig. 6 Optimization process of two-input-two-output compliant mechanism obtained by proposed method

采用本研究方法对图 3 所示的具有病态载荷特征的两输入两输出柔顺机构进行优化求解。在求解过程中, 结构拓扑构型变化平稳, 并最终获得了清晰且不含单类铰链的拓扑构型。再比较图 4、图 5 及图 6(h) 中各拓扑构型对应的输出位移可以发现, 采用本研究方法获得的最佳拓扑构型在两组输入载荷下都具有更大的输出位移。

4.2 四输入四输出柔顺并联机构

为进一步验证本研究方法在处理多输入多输出柔顺机构拓扑优化问题时的适应性, 用本研究方法对图 7 所示的四输入四输出柔顺并联机构进行拓扑优化。

图 7 为一个四输入四输出柔性并联机构的设计域, 机构的初始尺寸为  $120 \times 120$  (本算例的所有

物理量均为无量纲的量), 材料弹性模量  $E_0=1$ , 泊松比为 0.3, 输入力  $F_{\text{in},j}=1 (j=1,2,3,4)$ , 输入端与输出端无弹簧。4 个输入点在与输入载荷垂直的方向被约束, 输入载荷点及方向和输出位移点及方向见图 7。将初始设计域划分为  $14\ 400 (120 \times 120)$  个 4 节点平面应力单元, 4 个输入点和 4 个输出点的坐标见表 2。目标体积比设为 0.25, 过滤半径  $r_{\min}=1.5 \nabla$  ( $\nabla$  是结构单元边长的最小尺寸), 初始拓扑  $x_q^{(0)}=0.25 (q=1,2,\dots,N)$ , 经验参数  $\gamma_2=0.03$ 。

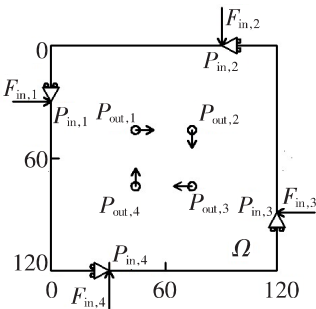


图 7 四输入四输出柔顺并联机构设计域  
Fig. 7 Design domain of four-input-four-output compliant parallel mechanism

表 2 输入输出点坐标信息  
Table 2 Coordinate information of input and output points

变量名	坐标	变量名	坐标
$P_{\text{in},1}$	(0,30)	$P_{\text{out},1}$	(45,45)
$P_{\text{in},2}$	(90,0)	$P_{\text{out},2}$	(75,45)
$P_{\text{in},3}$	(120,90)	$P_{\text{out},3}$	(75,75)
$P_{\text{in},4}$	(30,120)	$P_{\text{out},4}$	(45,75)

将各权重系数和标量因子设置成相等, 采用线性加权和法对上述四输入四输出柔顺并联机构进行试算, 算得  $|C_{\text{ratio},j}| \approx 9.80 (j=1,2,3,4)$  (此算例模型具有  $90^\circ$  旋转对称性)。取  $C=1, \gamma_1=2$ , 采用本方法重新对该四输入四输出柔顺并联机构进行优化, 对应的 4 个期望方向的输出位移都为 36.88, 获得的最终拓扑构型见图 8。

图 8 所示的优化结果表明: 本研究方法具有良好的适应性, 在处理多输入多输出柔顺并联机构拓扑优化问题时, 也能得到清晰且不含类铰链的最优拓扑构型。

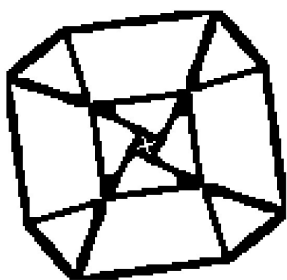


图8 采用本研究方法获得的四输入  
四输出柔顺并联机构优化构型

Fig. 8 Optimal configuration of four-input-  
four-output compliant parallel mechanism  
obtained by proposed method

## 5 结论

本研究基于界限公式法,结合与多输入或多输出点相关的柔顺机构柔顺度的小量变化约束措施、三场方案、变体积限技术以及光滑对偶求解算法,形成了一种新的多输入多输出柔顺机构拓扑优化方法。通过理论推导和数值算例验证,得出以下结论:

1) 将柔顺度小量变化约束措施、三场方案、变体积限技术相结合,有效地解决了多输入多输出柔顺机构拓扑优化数值计算中的不稳定性问题、灰度问题、类铰链问题和病态载荷问题,获得了清晰且不含类铰链的最终拓扑构型。

2) 基于传统界限公式法,通过一个界限变量将多个输出位移最大化目标等效转化为多个约束条件,有效地解决了多输入多输出柔顺机构拓扑优化的位移多目标问题。与现有的线性加权和法及自适应加权和法相比,本研究方法可获得具有更大输出位移的最终拓扑构型。

为进一步拓展本研究提出的方法,今后的研究工作可从以下两个方面展开:

① 输入输出位移耦合问题是多输入多输出柔顺机构拓扑优化研究中的重要问题,可以引入相应的解耦方法与本方法相结合,形成一种基于界限公式法的全解耦的多输入多输出柔顺机构拓扑优化方法。

② 本研究仅探讨了二维平面多输入多输出柔顺机构的设计问题,今后可以将其拓展到三维立体的多输入多输出柔顺机构的设计中。

## 〔参考文献〕

- [1] 于靖军,郝广波,陈贵敏,等. 柔顺机构及其应用研究进展[J]. 机械工程学报,2015,51(13):53-68.  
YU Jing-jun, HE Guang-bo, CHEN Gui-ming, et al. Research progress of compliant mechanism and its application[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51(13): 53-68.
- [2] Bourdin B. Filters in topology optimization[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001, 50(9): 2 143-2 158.
- [3] Sigmund O, Maute K. Topology optimization approaches[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2013, 48(6): 1 031-1 055.
- [4] Zhou M, Lazarov B S, Wang F, et al. Minimum length scale in topology optimization by geometric constraints[J]. Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering, 2015, 293: 266-282.
- [5] Haber R B, Jog C S, Bendsøe M P. A new approach to variable topology shape design using a constraint on the perimeter[J]. Structure Optimization, 1996, 11(1): 1-12.
- [6] Yoon G H, Kim Y Y, Bendsøe M P, et al. Hinge-free topology optimization with embedded translation-invariant differentiable wavelet shrinkage[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2004, 27(3): 139-150.
- [7] Poulsen T A. A new scheme for imposing a minimum length scale in topology optimization[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2003, 57(6): 741-760.
- [8] Yin L, Ananthasuresh G K. Design of distributed compliant mechanisms[J]. Mechanics Based Design of Structures and Machines, 2003, 31(2): 151-179.
- [9] Petersson J, Sigmund O. Slope constrained topology optimization[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1998, 41(8): 1 417-1 434.
- [10] Duysinx P, Bendsøe M P. Topology optimization of continuum structures with local stress constraints [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1998, 43(8): 1 453-1 478.
- [11] Luo Z, Chen L, Yang J, et al. Compliant mechanism design using multi-objective topology optimization scheme of continuum structures [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2005, 30(2): 142-154.
- [12] Luo J Z, Luo Z, Chen S K, et al. A new level set

- method for systematic design of hinge-free compliant mechanisms[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering*, 2008, 198(2): 318-331.
- [13] Sigmund O. Morphology-based black and white filters for topology optimization[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2007, 33(4): 401-424.
- [14] Li L, Khandelwal K. Topology optimization of structures with length-scale effects using elasticity with microstructure theory[J]. *Computers & Structures*, 2015, 157: 165-177.
- [15] Saxena A, Mankame N D. Design for manufacture of optimal compliant topologies with honeycomb continuum representation [C]//*Proceedings of IEEE Congress on Evolutionary Computation*. Newyork: IEEE, 2007: 2 956-2 963.
- [16] De-lima C R, Paulino G H. Auxetic structure design using compliant mechanisms: a topology optimization approach with polygonal finite elements[J]. *Advances in Engineering Software*, 2019, 129(3): 69-80.
- [17] Wang N F, Zhang X M. Compliant mechanisms design based on pairs of curves[J]. *Science China Technological Sciences*, 2012, 55(8): 2 099-2 106.
- [18] Lieu Q X, Lee J. Multi-resolution topology optimization using isogeometric analysis[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2017, 112(13): 2 025-2 047.
- [19] 张宪民, 陈永健. 多输入多输出柔顺机构拓扑优化及输出耦合的抑制[J]. *机械工程学报*, 2006, 42(3): 162-165.  
ZHANG Xian-min, CHEN Yong-jian. Topology optimization of multi-input multi-output compliant mechanism and suppression of output coupling[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2006, 42(3): 162-165.
- [20] Zhang X M, Ouyang G F, Wang H. Topology optimization of multiple inputs and multiple outputs compliant mechanisms[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2007, 20(1): 82-85.
- [21] 李兆坤, 张宪民. 多输入多输出柔顺机构几何非线性拓扑优化[J]. *机械工程学报*, 2009, 45(1): 186-194.  
LI Zhao-kun, ZHANG Xian-min. Topology optimization of multiple inputs and outputs compliant mechanisms with geometrically nonlinearity [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2009, 45(1): 186-194.
- [22] Lin J Z, Luo Z, Tong L Y. A new multi-objective programming scheme for topology optimization of compliant mechanisms[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2010, 40(1): 241-255.
- [23] Lee E, Gea H C. A strain based topology optimization method for compliant mechanism design[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2014, 49(2): 199-207.
- [24] Zhu B L, Zhang X M, Fatikow S. A multi-objective method of hinge-free compliant mechanism optimization[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2014, 49(3): 431-440.
- [25] Rahmatalla S, Swan C C. Sparse monolithic compliant mechanisms using continuum structural topology optimization[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005, 62(12): 1 579-1 605.
- [26] Wang M Y, Chen S. Compliant mechanism optimization: analysis and design with intrinsic characteristic stiffness[J]. *Mechanics Based Design of Structures & Machines*, 2009, 37(2): 183-200.
- [27] Sigmund O. Manufacturing tolerant topology optimization[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2009, 25(2): 227-239.
- [28] Lazarov B S, Schevenels M, Sigmund O. Topology optimization with geometric uncertainties by perturbation techniques[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2012, 90(11): 1 321-1 336.
- [29] Lazarov B S, Schevenels M, Sigmund O. Robust design of large-displacement compliant mechanisms [J]. *Mechanical Sciences*, 2011, 2(2): 175-182.
- [30] 占金青, 龙良明, 刘敏, 等. 基于最大应力约束的柔顺机构拓扑优化设计[J]. *机械工程学报*, 2018, 54(23): 32-38.  
ZHAN Jin-qing, LONG Liang-ming, LIU Min, et al. Topological design of compliant mechanisms with maximum stress constraint[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2018, 54(23): 32-38.
- [31] Da-alexandre A P, Cardoso E L. On the influence of local and global stress constraint and filtering radius on the design of hinge-free compliant mechanisms [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2018, 58(2): 641-655.
- [32] Da-silva G A, Beck A T, Sigmund O. Topology optimization of compliant mechanisms with stress con-



- straints and manufacturing error robustness[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2019, 354(1):397-421.
- [33] Da-silva G A, Beck A T, Sigmund O. Topology optimization of compliant mechanisms considering stress constraints, manufacturing uncertainty and geometric nonlinearity[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, 365(15): 112972.
- [34] Zhu B L, Zhang X M, Zhang H C, et al. Design of compliant mechanisms using continuum topology optimization: a review[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2020, 143:103622.
- [35] 陈成, 荣见华, 易珏虹, 等. 含有 Heaviside 密度映射的构型平稳变化的柔性机构拓扑优化设计[J]. *机械科学与技术*, 2020, 39(1):129-136.  
CHEN Cheng, RONG Jian-hua, YI Yu-hong, et al. Topology optimization design of compliant mechanism with configuration stable change by using Heaviside density projections[J]. *Chinese Journal of Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering*, 2020, 39(1):129-136.
- [36] Cristina A, Ruben A, Osvaldo M. Topology synthesis of multi-input-multi-output compliant mechanisms[J]. *Advances in Engineering Software*, 2014, 76:125-132.
- [37] Zhu B L, Chen Q, Jin M H, et al. Design of fully decoupled compliant mechanisms with multiple degrees of freedom using topology optimization[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2018, 126:413-428.
- [38] Zhu B L, Zhang X M, Min L, et al. Topological and shape optimization of flexure hinges for designing compliant mechanisms using the level set method[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2019, 32(1):42-53.
- [39] Bendsøe M P, Olhoff N, Taylor J E, et al. A variational formulation for multicriteria structural optimization[J]. *Journal of Structural Mechanics*, 1983, 11(12):523-524.
- [40] Marler R T, Arora J S. Survey of multi-objective optimization methods for engineering[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2004, 26(6): 369-395.
- [41] Jensen J S, Pedersen N L. On maximal eigenfrequency separation in two-material structures: the 1D and 2D scalar cases[J]. *Journal of Sound & Vibration*, 2006, 289(4):967-986.
- [42] Du J B, Olhoff N. Topological design of freely vibrating continuum structures for maximum values of simple and multiple eigenfrequencies and frequency gaps[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2007, 34(2):91-110.
- [43] Tsai T D, Cheng C C. Structural design for desired eigenfrequencies and mode shapes using topology optimization[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2013, 47(5):673-686.
- [44] 俞燎宏, 荣见华, 赵志军, 等. 多工况载荷下连续体结构柔顺度拓扑优化问题的新的求解方法[J]. *机械工程学报*, 2018, 54(5):210-219.  
YU Liao-hong, RONG Jian-hua, ZHAO Zhi-jun, et al. A new solving method of the compliance topology optimization problem of continuum structures under multiple load cases[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2018, 54(5):210-219.
- [45] Guest J K, Prevost J H, Belytschko T. Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, 61(2):238-254.
- [46] Pedersen C B, Buhl T, Sigmund O. Topology synthesis of large-displacement compliant mechanisms[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, 50(12):2 683-2 705.
- [47] Svanberg K. A class of globally convergent optimization methods based on conservative convex separable approximations[J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2002, 12(2):555-573.