

文章编号:1672-9331(2020)04-0078-07

基于信息点承载强度的常规公交线路聚类分析

王 佳,赵春笋,刘 帅,刘静波

(长沙理工大学 交通运输工程学院,湖南 长沙 410114)

摘 要: 为了增强城市公共交通的吸引力,提高交通资源的利用率,对常规公交线路进行了优化分析。首先,以信息点(point of information,POI)为基础数据对公交线路进行分析,构建公交线路 POI 承载强度模型,描述公交线路配置与交通小区出行需求的关系;然后,对公交线路 POI 承载强度进行聚类,分析不同种类公交线路 POI 承载强度与交通出行需求的吻合程度;最后,结合公交线路的运营现状提出了线路优化建议。研究表明:所建立的模型能够按照实际情况对公交线路进行分类。本研究为常规公交线路的优化提供了新的思路和方法。

关键词: 信息点;出行需求;公交线路 POI 承载强度;聚类分析;自然间断法

中图分类号: U491 **文献标志码:** A

Clustering analysis of conventional bus routes based on POI bearing strength

WANG Jia,ZHAO Chun-zheng,LIU Shuai,LIU Jing-bo

(School of Traffic and Transportation Engineering, Changsha University of Science & Technology, Changsha 410114, China)

Abstract: In order to enhance the attractiveness of urban public transportation and improve the utilization rate of transportation resources, the optimization analysis of conventional bus routes was carried out. Firstly, points of information (POI) were taken as the basic data to analyze the bus routes, establish the POI bearing strength model of the bus routes and describe the relationship between the configuration of the bus routes and the travel demand of the traffic communities. Then, POI bearing strength of bus routes was clustered to analyze the consistency between POI bearing strength of different kinds of bus routes and the travel demand. Finally, the optimization suggestions were put forward combining with the current operation situation of the bus routes. The research results show that the bus routes can be classified through the established model according to the actual situation. This study provides a new idea and method for the optimization of conventional bus routes.

Key words: point of information; travel demand; POI bearing strength of bus route; clustering analysis; Jenks Natural Breaks

优先发展公共交通是缓解交通拥堵、转变城市交通发展方式的必然选择。城市公共交通系统

的重要载体是公交线网,科学地对常规公交线网进行分析,提出优化建议,可提高常规公交的吸引

力。公交线网优化分析常用 OD 数据,但获取 OD 数据需耗费大量的人力、物力。随着大数据时代的快速发展,电子地图提供的各类信息点(point of information, POI)数据进入大众视野。这种新型的数据虽然不能完全代替 OD 数据,但能够在一定程度上反映居民的出行特征,为公交线网的优化提供了一种新的数据来源。在以往 POI 数据的相关研究中,多数将 POI 数据应用于城市的空间结构和各类公共设施的空间聚集领域。如 Xie 等^[1]提出网络核密度分析,从而提升了核密度的运算效率。Kwan^[2]利用 POI 数据对居民的出行特征进行分析,并且利用 GIS 对其进行了时空模拟。Mckenzie 等^[3]分析了同一类型 POI 数据在不同研究区域的特性,发现 POI 数据在不同研究区域具有变异性。李方正等^[4]利用 POI 数据进行核密度分析,通过对社区基础设施空间分布的研究,确定了社区绿道布设区域。孙宗耀等^[5]通过对济南市 POI 数据空间分布状况的分析,得到各类生活设施的聚集情况,并对与生活相关的配套设施的情况进行了评价。综上所述,国内外学者很少将 POI 数据运用于公交线网分析领域。所以,本研究将 POI 作为基础数据构建公交线路 POI 承载强度,并对其进行聚类分析,为公交线路优化提供一定的参考。

1 研究思路

先利用 POI 数据构建公交线路 POI 承载强度,再将公交线路 POI 承载强度聚类成不同类别,分析不同类别公交线路配置与交通小区出行需求的吻合情况,最后提出优化公交线路的合理建议。

具体步骤如下:

第一步:将研究区域划分为多个交通小区,获取交通小区 POI 数据,并对其进行量化处理。

第二步:基于划分后的交通小区,构建任意两个交通小区间的 POI 吸引需求、公交线路承载的 POI 吸引需求,分别描述任意两个交通小区间的发生吸引关系、公交线路与交通小区间的出行需求关系;在公交线路承载的 POI 吸引需求的基础上构建公交线路 POI 承载强度,即计算单位长度公交线路承载的 POI 吸引需求。

第三步:对公交线路 POI 承载强度进行聚类,分析不同类别公交线路配置与交通小区出行需求的配合情况,提出优化公交线路的合理建议。

2 POI 数据获取及量化

2.1 POI 数据获取

通过高德地图开放平台的 API 接口获取 POI 数据。按照不同类型 POI 对公交出行影响程度的大小,从中选出 12 种主要的 POI 数据。

2.2 交通小区划分及 POI 数据量化

按照 1 km×1 km 的网格对研究区域进行交通小区的划分^[6],考虑到不同类型 POI 对公交出行的影响程度不同,对不同类型 POI 进行量化折算。量化公式为:

$$D_i = \sum_{e=1}^E (\omega_e \cdot d_{ie}). \quad (1)$$

式中: D_i 为交通小区 i 的当量 POI; E 为获取的 POI 类型的数量; ω_e 为第 e 类 POI 的权重; d_{ie} 为交通小区 i 第 e 类 POI 数量。POI 的权重用结构熵权法确定^[7]。

3 公交线路 POI 承载强度计算

3.1 任意两个交通小区间的 POI 吸引需求

对于划分的 N 个交通小区,为描述任意两个交通小区间的发生吸引关系,需要构建任意两个交通小区间的 POI 吸引需求。它与交通小区 POI 类型的数量成正比,与交通小区间的距离成反比,即交通小区 POI 类型的数量越多,两个交通小区间的距离越近,它们之间的吸引需求越大。参考文献[8]构建模型如下:

$$P_{ij} = \frac{D_i \cdot D_j}{r_{ij}^2}. \quad (2)$$

式中: P_{ij} 为交通小区 i 到交通小区 j 的 POI 吸引需求; D_i, D_j 分别为交通小区 i, j 的当量 POI; r_{ij} 为交通小区 i, j 之间的直线距离。

为提高计算结果的精度,将 P_{ij} 修正为:

$$P'_{ij} = P_{ij} \cdot \frac{\sum_i D_i}{\sum_i \sum_j P_{ij}}. \quad (3)$$

式中： P'_{ij} 为修正后的交通小区 i 到交通小区 j 的 POI 吸引需求。

3.2 公交线路 POI 承载强度

为描述公交线路的配置与沿线相关设施的关系,即公交线路的配置与交通小区出行需求的关系,需构建公交线路承载的 POI 吸引需求。如果一条公交线路经过若干个交通小区,对任意两个交通小区间的 POI 吸引需求进行求和,其总和即为公交线路承载的 POI 吸引需求。当交通小区有多条公交线路经过时,需先将交通小区间的 POI 吸引需求分配到各公交线路。在线路实际运行时,不同长度的公交线路对客流的吸引会有所不同。为简化计算,采用简单均分法将交通小区间的 POI 吸引需求均分到每一条经过该交通小区的公路上。

公交线路越长,其经过的交通小区就越多,其承载的 POI 吸引需求就越大;反之,其承载的 POI 吸引需求就越小。为避免公交线路长度对其承载的 POI 吸引需求产生影响,需计算单位长度公交线路承载的 POI 吸引需求,即公交线路 POI 承载强度。

公交线路 m 的 POI 承载强度模型如下:

$$Q'_m = \frac{Q_m}{l_m} \tag{4}$$

式中： Q'_m 为公交线路 m 的 POI 承载强度； Q_m 为公交线路 m 承载的 POI 吸引需求； l_m 为公交线路 m 的长度。

其中,公交线路 m 承载的 POI 吸引需求模型如下:

$$Q_m = \sum_i \sum_j g_{ij} \frac{P'_{ij}}{K_{ij}};$$
$$g_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当线路同时经过交通小区 } i, j \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{5}$$

式中： K_{ij} 为交通小区 i 直达交通小区 j 的公交线路条数。

4 POI 承载强度聚类分析

4.1 分析思路

公交线路 POI 承载强度和交通小区出行需求密切相关。一般认为,公交线路途经的各类设施

越多,其承载的出行需求也就越多,则该公交线路也就越繁忙,其 POI 承载强度也就越大;反之,该公交线路 POI 承载强度就越小。如果公交线路的 POI 承载强度过大,会影响服务质量;但如果公交线路的 POI 承载强度过小,会造成资源浪费,增加公交企业运营成本^[9]。本研究旨在通过聚类分析,寻找公交线路 POI 承载强度的合适区间,使公交线路的配置与出行需求吻合良好,从而提高整体公交线路的承载能力,达到“适宜承载,协调发展”的目的。

4.2 分析方法

聚类分析方法有自然间断法(Jenks Natural Breaks)、K-Means、Mean-Shift 聚类算法等。公交线路承载的 POI 吸引需求的区间分析实际上是对一维数据进行分析,数据量较少。在这种情况下使用自然间断法较为合适^[10-11]。

自然间断法运用了聚类思维,其结束条件为组内差异最小,组间差异最大。操作步骤如下:

第一步:计算平均值的偏差平方和 SDAM。

① 计算平均值： $\overline{Q'} = \frac{Q'_1 + Q'_2 + \cdots + Q'_m}{m}$ 。

② 计算 SDAM： $\overline{Q'_m} = (Q'_1 - \overline{Q'})^2 + (Q'_2 - \overline{Q'})^2 + \cdots + (Q'_m - \overline{Q'})^2$ 。

第二步:迭代每个范围组合,计算类别均值的平方偏差平方和。

第一组： $[Q'_1] [Q'_2, Q'_3, \cdots, Q'_m]$

$$S_1 = (Q'_1 - Q'_1)^2 + \left(Q'_2 - \frac{Q'_2 + Q'_3 + \cdots + Q'_m}{m - 1}\right)^2 + \left(Q'_3 - \frac{Q'_2 + Q'_3 + \cdots + Q'_m}{m - 1}\right)^2 + \cdots + \left(Q'_m - \frac{Q'_2 + Q'_3 + \cdots + Q'_m}{m - 1}\right)^2$$
$$\vdots$$

第 $m - 1$ 组： $[Q'_1, Q'_2, Q'_3, \cdots, Q'_{m-1}] [Q'_m]$

$$S_{m-1} = \left(Q'_1 - \frac{Q'_1 + Q'_2 + \cdots + Q'_{m-1}}{m - 1}\right)^2 + \left(Q'_2 - \frac{Q'_1 + Q'_2 + \cdots + Q'_{m-1}}{m - 1}\right)^2 + \cdots + \left(Q'_{m-1} - \frac{Q'_1 + Q'_2 + \cdots + Q'_{m-1}}{m - 1}\right)^2 + (Q'_m - Q'_m)^2$$
$$\tag{7}$$

上述第二步是将数据分为两类时自然间断法的计算过程。同理,也可将数据分为其他类别进行计算。在使用自然间断法时,需要事先指定类别,但由此会导致分类具有主观性。为解决此问题,可采用轮廓系数法对不同类别进行评估,确定最优类别。

轮廓系数法综合考虑了簇的密集性与分散性,可用来评价聚类效果的优劣。轮廓系数的取值范围为 $[-1,1]$,其值越趋近于 1,说明聚类效果越优。计算公式^[12]如下:

$$S(i)=\frac{b(i)-a(i)}{\max(a(i),b(i))}。$$

(8)

表 1 公交线路 POI 承载强度区间及特征

Table 1 Ranges and characteristics of POI bearing strength of bus routes

类别	类型	公交线路 POI 承载强度区间	特征
I	承载压力过小区	$0 < Q'_m \leq 33.11$	公交线路的配置远远超过该区域人员的出行需求
II	承载压力偏小区	$33.11 < Q'_m \leq 78.78$	公交线路的配置一定程度上超过该区域人员的出行需求
III	承载压力适宜区	$78.78 < Q'_m \leq 219.86$	公交线路的配置能较好地满足该区域人员的出行需求
IV	承载压力偏大区	$219.86 < Q'_m \leq 368.73$	公交线路的配置在一定程度上不能满足该区域人员的出行需求
V	承载压力过大区	$Q'_m > 368.73$	公交线路的配置完全不能满足该区域人员的出行需求

从表 1 可以看出,当公交线路 POI 承载强度为第Ⅲ类时,公交线路的配置与交通小区的出行需求匹配较好。第Ⅰ类公交线路是调整优化的重点,可结合当地公交线路的运营现状,取消或重点调整第Ⅰ类公交线路。但需注意的是,若公交线路被取消会导致交通小区无公交线路覆盖,也会导致公交线路的配置和交通小区的出行需求不匹配。所以,取消第Ⅰ类公交线路时要综合考虑多方面的影响因素。若取消后确实会出现交通小区无公交线路覆盖的情况,则需要采取一定的措施解决此问题,如延伸其他类公交线路、改变公交线路走向等。同时,可优化调整第Ⅱ类公交线路,以解决第Ⅳ、Ⅴ类公交线路不能满足出行需求的问题,使公交线路尽量属于第Ⅲ类,从而使公交线网整体 POI 承载强度达到最佳。

5 实例分析

通过高德地图开放平台的 API 接口获取长沙市望城区 POI 数据,共 34 189 个。通过数据清

式中: $a(i)$ 为样本 i 与同簇内其他样本点距离的平均值; $b(i)$ 为样本 i 与非同簇样本点距离平均值的最小值。

4.3 类别特征分析

运用上述模型及方法分别对常德、张家界、娄底等 6 个城市的公交线路进行分析,计算公交线路 POI 承载强度。通过对公交线路 POI 承载强度进行聚类分析,取各个城市公交线路 POI 承载强度的平均值,并结合当地公交线路的运营现状,将公交线路 POI 承载强度分为 5 类。不同种类 POI 承载强度对应的特征见表 1。

洗,筛选出 12 种、共 24 695 个主要 POI 数据,见表 2。

表 2 望城区主要 POI 数据

Table 2 Main POI data of Wangcheng District

序号	POI 类型	POI 数量	序号	POI 类型	POI 数量
1	餐饮服务	4 132	7	商务住宅	666
2	风景名胜	258	8	生活服务	2 473
3	公司企业	3 002	9	体育休闲服务	940
4	购物服务	8 028	10	医疗保健服务	1 177
5	金融保险服务	368	11	政府机构及社会团体	1 328
6	科教文化服务	1 578	12	住宿服务	745

在 ArcGIS 中采用创建渔网的方式,按照 $1\text{ km}\times 1\text{ km}$ 的网格对望城区进行交通小区划分,面积不足 1 km^2 的边缘网格也划分为一个交通小区,共划分出 1 122 个交通小区。将 POI 数据加载到望城区的用地现状图上,得到望城区 POI 空间分布图,见图 1。

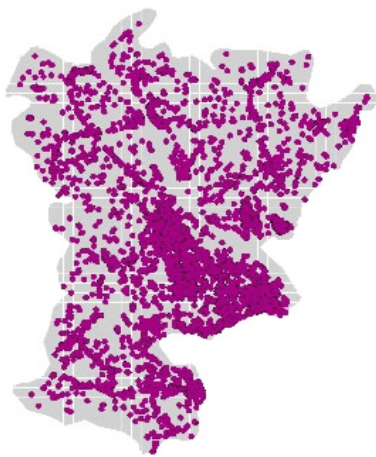


图 1 望城区 POI 空间分布图

Fig. 1 POI spatial distribution diagram of Wangcheng District

通过调研得知,望城区现有公交线路 70 条。根据上述公式,计算得出每条公交线路 POI 承载强度,见表 3。

通过对现状公交运营线路的调研可知,望城区公交线路的特征与常德、张家界、娄底等市的公交线路的特征相似,故将计算得出的公交线路 POI 承载强度用自然间断法进行聚类分析。按照表 1 中公交线路 POI 承载强度区间对望城区的公交线路进行分类,见表 4。

分析表 4 可知:

1) 望城区 63% 的公交线路的配置超过交通小区的出行需求,其中 34% 的公交线路处于承载压力过小区,29% 的公交线路处于承载压力较小区。

2) 望城区仅有 26% 的公交线路的配置与交通小区的出行需求匹配较好,公交线路承载的压力相对适宜。

3) 望城区仅有 11% 的公交线路的配置不能满足交通小区的出行需求,其中 5.5% 的公交线路处于承载压力较大区,另外 5.5% 的公交线路处于承载压力过大区。

将表 1 中望城区公交线路的分类情况与现状相结合,对望城区公交线路优化提出如下建议:取消部分第Ⅰ类公交线路,结合本地实际调整第Ⅱ类公交线路以减轻第Ⅳ、Ⅴ类公交线路的压力;同时,调整未被取消的公交线路,弥补取消第Ⅰ类公交线路造成的交通小区无公交线路覆盖的情况,使大多数公交线路属于第Ⅲ类。这样,公交线路的配置

与该区居民的出行需求变得较为匹配,资源配置也相对合理,同时也能减轻政府的财政负担。

表 3 望城区公交线路 POI 承载强度
Table 3 POI bearing strength of bus routes in Wangcheng District

公交线路 编号	公交线路 名称	公交线路 路 POI 承 载强度	公交线路 编号	公交线路 名称	公交线路 路 POI 承 载强度
1	N301	2.017	36	W179	53.276
2	W101	0.599	37	W180	8.372
3	W102	2.181	38	W185	205.440
4	W103	438.074	39	W186	448.454
5	W104	7.087	40	W187	152.608
6	W105	135.884	41	W188	420.936
7	W106	168.393	42	W189	608.450
8	W107	95.618	43	W201	46.658
9	W108	26.981	44	W202	64.670
10	W109	59.764	45	W203	1.791
11	W111	130.213	46	W204	186.961
12	W113	6.854	47	W205	33.112
13	W115	272.045	48	W206	56.983
14	W116	291.059	49	W207	122.874
15	W117	127.903	50	W208	164.981
16	W118	9.187	51	W209	160.544
17	W123	200.876	52	W210	0.199
18	W125	147.296	53	W211	56.174
19	W126	195.457	54	W212	96.700
20	W127	10.441	55	W213	73.591
21	W128	0.571	56	W215	78.776
22	W129	9.071	57	W216	72.650
23	W131	98.197	58	W217	68.778
24	W132	2.985	59	W218	2.686
25	W135	22.181	60	W220	97.569
26	W136	97.929	61	W221	1.428
27	W139	190.010	62	W222	160.279
28	W151	118.465	63	W223	2.365
29	W157	219.859	64	W225	368.326
30	W158	3.241	65	W226	121.528
31	W167	2.716	66	W227	3.872
32	W168	64.891	67	W228	96.793
33	W176	2.277	68	W229	0.276
34	W177	206.277	69	W230	282.214
35	W178	47.633	70	W231	130.929

表 4 望城区公交线路 POI 承载强度聚类结果

Table 4 Classifying result of POI bearing strength of bus routes in Wangcheng District

类别	公交线路名称
I	N301,W101,W102,W128,W132,W158,W167,W176,W203,W210,W218,W221,W223,W227,W229,W104,W113,W118,W127,W129,W180,W108,W135,W205
II	W109,W178,W179,W201,W206,W211,W202,W213,W216,W217
III	W105,W107,W111,W117,W168,W125,W131,W136,W151,W207,W212,W215,W220,W226,W228,W231,W106,W123,W126,W139,W157,W177,W185,W187,W204,W208,W209,W222
IV	W115,W116,W225,W230
V	W103,W186,W188,W189

6 结论

本研究构建了公交线路 POI 承载强度模型,利用聚类的方法对公交线路 POI 承载强度进行了分析,对公交线路配置与交通小区出行需求的匹配情况进行了分类表述,进而提出了公交线路的优化建议。具体结论如下:

- 1) 在目前优化公交线网的大环境下,利用容易获取的 POI 数据对公交线路进行优化分析,节约了公交线网分析前期数据的获取成本。
- 2) 构建了公交线路 POI 承载强度模型,为公交线网的优化提供了新的思路和方法。该模型具有以下优点:模型所用的 POI 数据比 OD 数据更易获取,节省了大量人力、物力,节约了成本;适用于各地区常规公交线网的优化,普适性强;利用 ArcGIS 和编程软件进行计算,提高了计算效率。但此模型也存在以下不足之处:在进行公交线路承载的 POI 吸引需求分析时,仅考虑了直达线路而未考虑换乘线路;在将交通小区间的 POI 吸引需求分配到公交线路上时,没有充分考虑公交线路间的差异性,直接采取了均分法。在未来的研究中,将进一步考虑各方面的因素,使模型的计算结果更加贴近实际情况。

[参考文献]

[1] Xie Z, Yan J. Kernel density estimation of traffic accidents in a network space[J]. Computers, Environment and Urban Systems,2008,32(5):396-406.

[2] Kwan M P. GIS methods in time-geographic re-

search: geocomputation and geovisualization of human activity patterns[J]. Geografiska Annaler,2010, 86(4):267-280.

[3] Mckenzie G,Janowicz K,Gao S,et al. How where is when? On the regional variability and resolution of geosocial temporal signatures for points of interest [J]. Computers Environment and Urban Systems, 2015,54:336-346.

[4] 李方正,郭轩佑,陆叶,等. 环境公平视角下的社区绿道规划方法——基于 POI 大数据的实证研究[J]. 中国园林,2017,33(9):72-77.

LI Fang-zheng, GUO Xuan-you, LU Ye, et al. Community greenway planning method from the perspective of environmental equity — an empirical study based on POI big data[J]. Chinese Garden,2017, 33 (9):72-77.

[5] 孙宗耀,翟秀娟,孙希华,等. 基于 POI 数据的生活设施空间分布及配套情况研究——以济南市内五区为例[J]. 地理信息世界,2017,24(1):65-70.

SUN Zong-yao, ZHAI Xiu-juan, SUN Xi-hua, et al. Research on the spatial distribution and supporting conditions of living facilities based on POI data — a case study of five districts in Jinan[J]. Geographic Information World,2017,24(1):65-70.

[6] 林璐,马丽华,陈延博,等. 利用 ArcGIS 模型构建器实现矢量数据整合的方法[J]. 地理空间信息,2018, 16(4):62-63.

LIN Lu, MA Li-hua, CHEN Yan-bo, et al. Vector-data integration method based on ArcGIS model builder[J]. Geospatial Information, 2018, 16 (4): 62-63.

[7] 祖富豪,赵秋红. 基于结构熵权法和 HFWGHM 算子的海上救援航空应急资源布局评价方法研究[J].

数学的实践与认识,2019,49(19):128-138.

ZU Fu-hao,ZHAO Qiu-hong. Research on the evaluation method of emergency resource layout of maritime rescue aviation based on structural entropy weight method and HFWGHM operator[J]. Mathematics in Practice and Theory,2019,49(19):128-138.

[8] 王慧晶,曹尧谦.城市群城际轨道客流预测方法研究[J].铁道科学与工程学报,2015,12(6):1 520-1 525.

WANG Hui-jing,CAO Yao-qian. Research on forecasting method of passenger flow of intercity rail in urban agglomerations[J]. Journal of Railway Science and Engineering,2015,12(6):1 520-1 525.

[9] 王殿海,熊满初,章立辉,等.基于舒适度的公交线路网优化方法[J].西南交通大学学报,2017,52(4):789-795.

WANG Dian-hai,XIONG Man-chu,ZHANG Li-hui, et al. A method of bus network optimization based on comfort level[J]. Journal of Southwest Jiaotong University,2017,52(4):789-795.

[10] Jenks G F. The data model concept in statistical mapping[J]. International Yearbook of Cartography,1967(1):186-190.

[11] 李擎,刘仍奎,白磊,等.基于网格的铁路轨道状态大数据可视化模型[J].铁道科学与工程学报,2018,15(7):1 879-1 885.

LI Qing,LIU Reng-kui,BAI Lei,et al. Big data visualization model of railway track state based on grid[J]. Journal of Railway Science and Engineering,2018,15(7):1 879-1 885.

[12] 孙石磊,王超,赵元棣.基于轮廓系数的参数无关空中交通轨迹聚类方法[J].计算机应用,2019,39(11):3 293-3 297.

SUN Shi-lei,WANG Chao,ZHAO Yuan-di. Parametric independent air traffic trajectory clustering method based on contour coefficient[J]. Computer Application,2019,39(11):3 293-3 297.

(上接第 41 页)

JTG 472-2015,Steel fiber reinforced concrete[S]. Beijing:Standards Press of China,2015.

[17] 张劲,王庆扬,胡守营,等. ABAQUS 混凝土损伤塑性模型参数验证[J]. 建筑结构,2008(8):127-130.

ZHANG Jin,WANG Qing-yang,HU Shou-ying, et al. Parameters verification of concrete damaged plastic model of ABAQUS[J]. Building Structure,2008(8):127-130.

[18] 秦浩,赵宪忠. ABAQUS 混凝土损伤因子取值方法研究[J]. 结构工程师,2013,29(6):27-32.

QIN Hao,ZHAO Xian-zhong. Study on the ABAQUS damage parameter in the concrete damage plasticity model[J]. Structural Engineers,2013,29(6):27-32.

[19] 李伟琛,韩小雷,崔济东.基于试验的 ABAQUS 混凝土塑性损伤参数取值方法[J]. 结构工程师,2016,32(2):64-69.

LI Wei-chen,HAN Xiao-lei,CUI Ji-dong. Determination of damage parameter of ABAQUS CDP model based on test data[J]. Structural Engineers,2016,32(2):64-69.

[20] 雷拓,钱江,刘成清.混凝土损伤塑性模型应用研究[J]. 结构工程师,2008(2):22-27.

LEI Tuo,QIAN Jiang,LIU Cheng-qing. Application of damaged plasticity model for concrete[J]. Structural Engineers,2008(2):22-27.