

文章编号:1672-9331(2018)03-0048-06

基于大范围空间转动的车—桥耦合振动分析

陈得良, 全 俊

(长沙理工大学 土木工程学院, 湖南 长沙 410114)

摘要: 针对偶然外部强激励引起桥梁结构不同支撑发生相对运动时的车—桥耦合振动响应问题, 首先利用点接触车—桥耦合动力学模型, 建立了非惯性参考视角下的三维车—桥系统的耦合动力学控制方程; 然后利用分离变量法对车—桥耦合动力学控制方程进行了分析; 并以单跨简支梁为例探讨了梁体转速对车—桥耦合系统动力响应的影响。研究结果表明, 偶然外部强激励(如地震)引起桥梁结构发生相对水平转动, 由于转动角速度与桥梁结构位移、速度相互耦合, 转动角速度的大小对桥梁结构振动响应具有重要影响; 对此时的车—桥耦合动力系统采用非惯性参考视角下的模型进行分析, 能更全面地反应实际情况, 得到更准确的分析结果。

关键词: 车—桥耦合振动; 非惯性参考视角; 大范围空间运动; 相对转动; 动力刚化; 振动响应

中图分类号: U441.3

文献标识码: A

Analysis of coupling vibration of vehicle—bridge system based on large range space rotation

CHEN De—liang, QUAN Jun

(School of Civil Engineering, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410114, China)

Abstract: In order to study the problem of vehicle bridge coupling vibration response to the relative motion of bridge structure at different support under the effect of accidental external strong excitation, a type of the close contact vehicle—bridge coupling dynamics model is presented. The separation variable method is performed to analyze the coupling equation and to discuss the dynamic response of the vehicle—bridge coupled system under the non—inertial reference view. With single span beam as an example, the beam body rotation velocity effect on vehicle—bridge dynamic responses of the coupled system is discussed. The researches demonstrated that in occasional strong external incentives (e.g. earthquake) caused the relative horizontal rotation of bridge structure, due to the rotation velocity is coupled with the displacement and velocity of the bridge structure, the angular velocity of rotation has an important influence on the vibration response of the bridge structure, applying the non—inertial reference frame to describe and analyze the vehicle—bridge coupled dynamic system would be more intuitive and convenient, when the bridge structure occur the horizontal rotation motion(relative to the ground) caused by the occasional strong external excitation.

Key words: coupling vibration of vehicle—bridge system; non—inertial reference; large space movement; relative rotation; dynamic stiffening; vibration response

收稿日期: 2018-03-16

通讯作者: 陈得良(1971—), 男, 湖北英山人, 长沙理工大学教授, 博士, 主要从事结构非线性动力学方面的研究。

E-mail: deliang_chen@126.com

当车辆行驶在桥梁上并遭遇地震时,地震动将通过地基及基础引起桥墩的振动,再通过支座及桥梁上部结构作用到车辆上,这就构成了地震作用下的车—桥耦合振动系统。从震源到达桥梁—车体的传递过程中,地震波可能在较大的区域范围内出现幅值、相位的变化,进而在时程上表现出显著的差异,这种差异称之为地震地面运动的空间变异性,它将导致线性分布的桥梁结构在不同支撑处在同一地震中经历显著的运动差异^[1-4]。国内外学者针对地震的空间变异性对大跨度桥梁的影响进行了大量研究工作,如:人工模拟非一致地震动激励输入^[5]、地震作用下车桥系统的多维多点随机振动研究以及建立多点地震动输入法建立车—桥耦合振动动力学模型^[6,7]等。然而,学者们虽然注意到,在偶然强激励荷载作用下桥梁结构不同支撑处会出现运动形式差异^[8-12],如:两支座位移差异导致桥梁结构相对原有地基参考系发生相对平动及转动等,但在进行这种特殊情况下的车—桥耦合振动分析时,仍是在惯性参考系中建立分析模型,这显然没有考虑到偶然强激励作用引起桥梁结构产生的空间运动对车—桥耦合系统的影响。因此,在非惯性视角下对这种特殊偶然强激励荷载作用下的车—桥耦合动力学系统进行研究就显得十分必要。

作者基于 Hamilton 变分原理,利用三维车—桥系统的耦合动力学模型,采用新的非惯性参考视角建立偶然强激励作用下车—桥耦合动力学系统控制方程,来研究桥梁在偶然外在强激励因素作用下两端支座相对水平转动角速度对车—桥耦合系统动力响应的影响。

1 非惯性参考视角下车—桥耦合系统动力学描述

1.1 非惯性参考视角下中车—桥耦合系统运动学描述

非惯性参考视角下三维点接触车—桥耦合系统力学模型如图 1 所示。图 1 中, $O'x'y'z'$ 为惯性坐标系, $Oxyz$ 为相对坐标系; r_0 为相对坐标系原点到惯性系坐标原点的矢径; u_a 为梁内任意点 a 在相对坐标系变形后的位移矢量; r_a 为变形后 a 点相对于惯性系的矢径。对梁上移动车辆采用 1/4

汽车悬挂模型进行模拟,设车体质量为 m ,车体垂向位移为 z_1 ,悬架阻尼为 c ,悬架刚度为 k ,不计轮对质量,模型中轮对与桥面采用密贴接触模型。

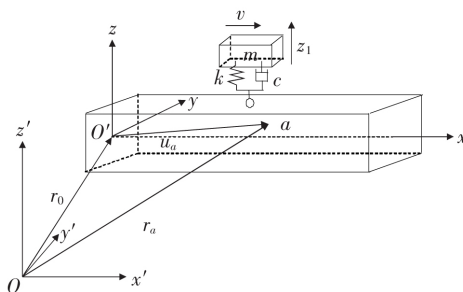


图 1 非惯性参考视角下车—桥耦合系统动力学模型

Fig. 1 Vehicle—bridge interaction model in non-inertia system

考虑三维弹性梁的结构,设梁结构上任意一点 a 坐标位移分量为:

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, t) - \frac{1}{2} \int_0^x \left[\left(\frac{\partial v_0}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial \xi} \right)^2 \right] d\xi - y v_{0,x}(x, t) - z w_{0,x}(x, t),$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, t),$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, t). \quad (1)$$

式中: u_0, v_0, w_0 为梁中线上任意一点在相对坐标系下的位移分量; u, v, w 分别为梁上任意点 a 在相对坐标系 x, y, z 方向上的位移; $(\cdot)_{,x}$ 表示对 x 的一次导数。

利用相对坐标系和惯性坐标系之间的转换关系,可得梁上任意一点 a 在惯性坐标系下的位移矢量为:

$$r_a = r_0 + u_a. \quad (2)$$

式中: $u_a = \sum_{i=1}^3 (x_i + u_i) e_i$ 。

对式(2)求一次导数,可得任意一点 a 在惯性坐标系的速度矢量^[13]为:

$$\dot{r}_a = \dot{r}_0 + \omega \times u_a + \dot{u}_i e_i. \quad (3)$$

式中: $(\dot{\cdot})$ 表示对时间求一次导数; ω 为相对坐标系相对于惯性系转动的角速度; $r_0 = r_i e_i$, $\omega = \omega_i e_i$, r_i 和 ω_i 分别为相对坐标系相对于惯性坐标系的位移和角速度; e_i 则为惯性坐标系下的基向量。

当仅考虑梁结构在偶然强激励作用下梁结构两端相对于大地只发生绕 z 轴转动时,此时相当于 $r_1 = r_2 = r_3 = 0$, $\omega_1 = \omega_2 = 0$,则此时梁上任意一

点 a 在惯性参考系下仅绕 z 轴转动时加速度矢量为:

$$\ddot{r}_a = \ddot{r}_0 + \frac{d}{dt}(\omega \times u_a + \dot{u}_i e_i) + \omega \times (\omega \times u_a + \dot{u}_i e_i) = [\ddot{u} - \omega_3^2(x+u) - \dot{\omega}_3 v - 2\omega_3 \dot{v}]e_1 + [\ddot{v} - \omega_3^2 v + \dot{\omega}_3(x+u) + 2\omega_3 \dot{u}]e_2 + \ddot{w}e_3. \quad (4)$$

1.2 非惯性参考视角下车-桥耦合系统动力学方程

根据 Hamilton 变分原理,弹性变形体动力学一般表达式可写为:

$$\int_0^t (\delta T - \delta U) dt + \int_0^t \delta W dt = 0. \quad (5)$$

式中: δT , δV 和 δW 分别为系统的动能、形变势能和外力功的变分。

假设梁结构的密度为 ρ , 梁体积为 V , 则惯性参考系下三维空间梁动能变分为:

$$\delta T = \delta \int \frac{1}{2} \rho (\dot{r}_a)^2 dV. \quad (6)$$

利用式(4)及式(1), 可得惯性参考系下用中面位移分量表示的三维空间梁动能变分:

$$\delta T = -\rho A \int_0^l \{ [\ddot{u}_0 - \omega_3^2(x+u_0) - \dot{\omega}_3 v_0 - 2\omega_3 \dot{v}_0] \delta u + [\ddot{v}_0 - \omega_3^2 v_0 + \dot{\omega}_3(x+u_0) + 2\omega_3 \dot{u}_0] \delta v + \ddot{w}_0 \delta w \} dx. \quad (7)$$

式中: A 为梁的横截面积。

考虑应变-位移非线性关系, 可得到梁上任一点应变分量^[14], 可写为:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \\ \epsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \epsilon_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned} \quad (8)$$

并定义梁的内力微分关系为:

$$[N_x \ M_y \ M_z] = \int [\sigma_x \ y\sigma_x \ z\sigma_x] dA. \quad (9)$$

不考虑梁的剪切变形, 则三维弹性梁应变能可写为:

$$U = \int_V \sigma_{xx} \epsilon_{xx} dV = \int_V \left[\sigma_{xx} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \right] dV. \quad (10)$$

利用式(1), (8)和式(9), 则式(10)可以进一步写为:

$$U = \int (N_x u_{0,x} - M_y v_{0,xx} - M_z w_{0,xx}) dx. \quad (11)$$

对式(11)进行变分, 可得三维空间梁势能变分为:

$$\delta U = - \int \{ N_{x,x} \delta u_0 + M_{y,xx} \delta v_0 + M_{z,xx} \delta w_0 \} dx. \quad (12)$$

三维空间梁的外力虚功变分可写为:

$$\delta W = \int_0^l (f_u \delta u_0 + f_v \delta v_0 + f_w \delta w_0) dx. \quad (13)$$

式中: f_u , f_v , f_w 分别为相对坐标系下梁单位长度在 x , y , z 方向上的分布外力, 且有

$$f_w = P \delta(vt - x). \quad (14)$$

式(14)中: v 为车辆的移动速度。

从车体力的平衡可以直接导出车体的动力平衡方程为:

$$m \cdot \ddot{z}_1 + c \cdot (\dot{z}_1 - \dot{w}) + k \cdot (z_1 - w) = 0. \quad (15)$$

式中: c 为悬架阻尼; k 为悬架刚度。

令 $n = c/2m$, $\Omega_0 = \sqrt{k/m}$, 有

$$\ddot{z}_1 + 2n\dot{z}_1 + \Omega_0^2 z_1 = 2n\dot{w} + \Omega_0^2 w. \quad (16)$$

根据力的相互作用, 可得梁上的移动荷载为:

$$P = mg + k(z_1 - w) + c(\dot{z}_1 - \dot{w}). \quad (17)$$

由式(7), (12), (13)及式(16), 并忽略高阶非线性项, 可得该系统的动力学控制方程组为:

$$\begin{aligned} N_{x,x} &= \rho A [\ddot{u}_0 - \omega_3^2(x+u_0) - \dot{\omega}_3 v_0 - 2\omega_3 \dot{v}_0] - f_u, \\ M_{y,xx} + \rho I_{zz} (\ddot{v}_{0,xx} - \omega_3^2 v_{0,xx}) &= \rho A [\ddot{v}_0 - \omega_3^2 v_0 + \dot{\omega}_3(x+u_0) + 2\omega_3 \dot{u}_0 - \omega_3^2 x H_v] - f_v, \\ M_{z,xx} + \rho I_{yy} (\ddot{w}_{0,xx} - \omega_3^2 w_{0,xx}) &= \rho A (\ddot{w}_0 - \omega_3^2 x H_w) - f_w, \\ \ddot{z}_1 + 2n\dot{z}_1 + \Omega_0^2 z_1 &= 2n\dot{w}_0 + \Omega_0^2 w_0. \end{aligned} \quad (18)$$

式中: $H_v = \int_0^x v_{,\xi\xi} d\xi$; $H_w = \int_0^x w_{,\xi\xi} d\xi$.

2 方程求解

本研究仅考虑了当桥梁两支座在偶然强激励作用下, 仅引起梁体的水平匀速转动(即左右支座的水平相对转动)而没有引起梁体其他方向的运动, 同时仅考虑了车辆移动荷载作用(不考虑制动力)下可忽略 U 方向荷载和 V 方向荷载的影响, 即 $f_u = f_v = 0$, 此时车-桥耦合问题可以看作是车-桥仅在非惯性参考系下绕 z 轴转动, 利用应

变一位移非线性关系式(8)、内力微分关系式(9)及中面应变一位移关系(1),得到用梁的中面位移分量表示非惯性参考视角下车-桥耦合系统非线性运动控制方程组:

$$\begin{aligned} EAu_{0,xx} &= \rho A[\ddot{u}_0 - \omega_3^2(x+u_0) - \dot{\omega}_3 v_0 - 2\omega_3 \dot{v}_0], \\ &- EI_{zz} v_{0,xxxx} + \rho I_{zz}(\ddot{v}_{0,xx} - \omega_3^2 v_{0,xx}) = \\ \rho A[\ddot{v}_0 - \omega_3^2 v_0 + \dot{\omega}_3(x+u_0) + 2\omega_3 \dot{u}_0 - \omega_3^2 x H_v], \\ &- EI_{yy} w_{0,xxxx} + \rho I_{yy}(\ddot{w}_{0,xx} - \omega_3^2 w_{0,xx}) = \\ &\rho A(\ddot{w}_0 - \omega_3^2 x H_w) - f_w, \\ \ddot{z}_1 + 2n\dot{z}_1 + \Omega_0^2 z_1 &= 2n\dot{w}_0 + \Omega_0^2 w_0. \quad (19) \end{aligned}$$

注意到方程组(19)中的转动角速度及角加速度与位移、速度相耦合,且由于系统的空间运动产生了静态变形项,即方程组中的 $\omega_3^2 x$ 和 $\dot{\omega}_3 x$ 项。

对于简支梁,与方程组(19)对应的边界条件为:

$$x=0, l \text{ 处: } \begin{cases} u_0 = v_0 = w_0 = 0 \\ u_{0,xx} = v_{0,xx} = w_{0,xx} = 0 \end{cases} \quad (20)$$

设方程组(20)的解为三角函数,其振型叠加表达式为:

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} U_i(t) \sin \frac{i\pi x}{l}, \\ v_0(x, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} V_i(t) \sin \frac{i\pi x}{l}, \\ w_0(x, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} W_i(t) \sin \frac{i\pi x}{l}. \quad (21) \end{aligned}$$

将式(21)代入方程组(19)并进行伽辽金积分,得到常微分方程组为:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_j(t) + \left[\frac{E}{\rho} \left(\frac{j\pi}{l} \right)^2 - \omega_3^2 \right] u_j(t) - \\ \frac{2}{l} \omega_3^2 \int_0^l x \sin \frac{j\pi x}{l} dx - \dot{\omega}_3 v_j(t) - 2\omega_3 \dot{v}_j(t) = 0, \\ \ddot{v}_j(t) + \frac{1}{Y_{vj}} \left\{ \frac{EI_{zz}}{\rho A} \left(\frac{j\pi}{l} \right)^4 - \omega_3^2 \left[1 + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{I_{zz}}{A} \left(\frac{j\pi}{l} \right)^2 \right] \right\} v_j(t) + \int_0^l \left(\frac{2\omega_3^2}{Y_{vj} l} H_v + \right. \\ \left. \frac{2\dot{\omega}_3}{Y_{vj} l} \right) x \sin \frac{j\pi x}{l} dx + \frac{\dot{\omega}_3}{Y_{vj}} u_j(t) + \frac{2\omega_3}{Y_{vj}} \dot{u}_j(t) = 0, \\ \ddot{w}_j(t) + \frac{1}{Y_{wj}} \left[\frac{EI_{yy}}{\rho A} \left(\frac{j\pi}{l} \right)^4 - \frac{I_{yy}}{A} \omega_3^2 \left(\frac{j\pi}{l} \right)^2 \right] w_j(t) + \\ \frac{2\omega_3^2}{Y_{wj} l} \int_0^l x H_w \sin \frac{j\pi x}{l} dx = \frac{2P}{\rho A l Y_{wj}} \sin \frac{j\pi x}{l}, \\ \ddot{z}_1 + 2n\dot{z}_1 + \Omega_0^2 z_1 = 2n\dot{w}_0 + \Omega_0^2 w_0. \quad (22) \end{aligned}$$

式中: $Y_{vj} = 1 + \frac{I_{zz}}{A} \left(\frac{j\pi}{l} \right)^2$; $Y_{wj} = 1 + \frac{I_{yy}}{A} \left(\frac{j\pi}{l} \right)^2$; $j = 1, 2, 3, \dots$ 。

由式(22)第一个方程组的第二项可以看出,系统轴向刚度随系统空间运动的角速度增大而减少。但由于系统的固有刚度在数量级上远大于 ω_3^2 ,故其对轴向振动的影响不大。从后两个方程组的第二、三项可以看出,系统水平方向和横向的刚度随系统空间运动的角速度增加而增大。此外,在系统发生绕 z 轴定轴转动时,梁体结构的轴向变形 u 与水平方向变形 v 相互耦合,横向变形 w 与车辆位移 z_1 相互耦合。因此,为方便计算处理,在进行系统的车-桥耦合振动响应分析时,只需对式(22)后两项方程组进行计算分析即可。

3 数值分析与讨论

3.1 案例分析

考虑如下的车-桥耦合系统,参数取自文献[15]:杨氏模量 $E = 2.87 \times 10^6$ kN/m²,惯性矩 $I_y = 2.90$ m⁴, $I_z = 2.40$ m⁴,梁长 $L = 25$ m,其中,梁单位长度质量 $m_b = 2\ 303$ kg,体密度 $\rho = 7\ 200$ kg/m³,车体质量 $m_c = 5\ 750$ kg,悬架刚度 $k = 1\ 595$ kN/m,忽略悬架阻尼。

为验证该模型的合理性,基于本研究的计算方法分析惯性参考系下车-桥耦合系统的动力学响应,并选取和参考文献[15]相同的参数,取车体移动速度 $v = 27.78$ m/s,转动角速 $\omega_3 = 0$ rad/s。

为提高计算效率,取前三阶模态进行分析。采用基于四阶-五阶 Runge-Kutta 功能函数的商业计算软件 MATLAB 对方程进行编程求解。图 2 和图 3 分别为梁体跨中处横向振动及车体的位移时程图。从图 2,3 可以看出,基于本研究计算方法得出的数值结果与参考文献[15]的数据基本吻合。由于本研究计算方法包含了高阶模态的影响,因此计算结果更为准确。

图 4 和图 5 为梁体跨中横向振动及车体加速度时程图。从图 4,5 可以看出,在计及高阶模态的影响时,梁体跨中横向振动加速度相比于参考文献数据,出现了明显的波动现象,车体加速度较参考文献的计算结果更为平稳,加速度峰值有所降低。上述的对比分析可以证明本研究计算方法的正确性。

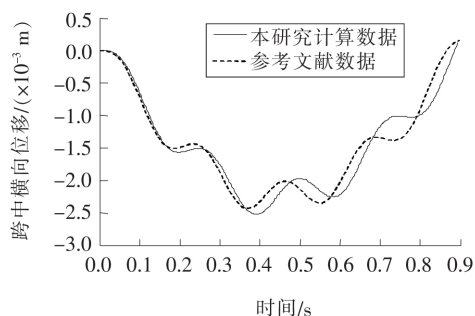


图2 跨中横向位移时程

Fig. 2 Midpoint displacement of bridge

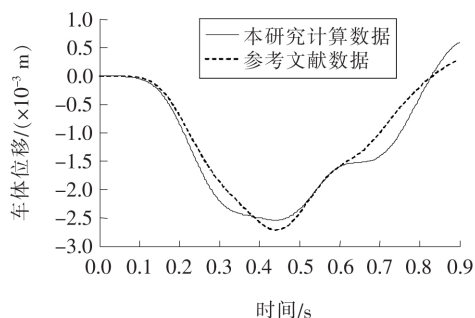


图3 车体位移时程

Fig. 3 Vertical displacement of vehicle

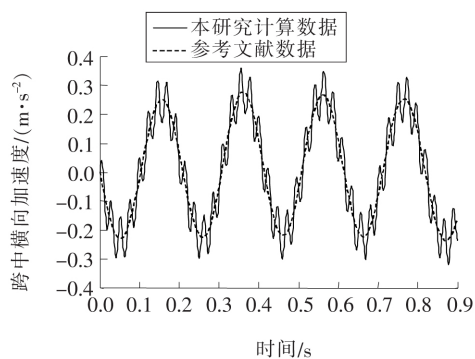


图4 跨中横向加速度时程

Fig. 4 Midpoint acceleration of bridge

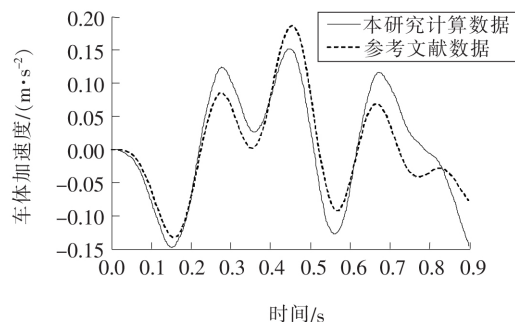


图5 车体加速度时程

Fig. 5 Vertical acceleration of bridge and vehicle

3.2 梁结构相对转动速度对车—桥耦合振动系统的影响

考虑转速对系统的影响,取行车速度 $v = 27.78 \text{ m/s}$,系统作匀速转动,分别考虑转动角速度在取 $0, 2, 5, 10 \text{ rad/s}$ 时对系统的影响。图6给出了梁体跨中处横向振动及车体在不同 ω_3 转速取值下的位移时程。从图6可以看出,随着 ω_3 取值的增加,梁体跨中横向振动响应幅值逐渐减小,车体位移呈现出相同的变化趋势。由此可见,在系统做大范围空间运动时,梁体的横向振动刚度随空间运动角速度的增加而增大,从而降低了横向振动的位移幅值,通过耦合关系继而也削弱了车体的振动响应。当角速度继续增加到某一临界值时,横向振动会由于刚度的增加而出现动力刚化现象。而在传统惯性参考系下做车—桥耦合振动分析时是不会考虑到这一因素的影响的。

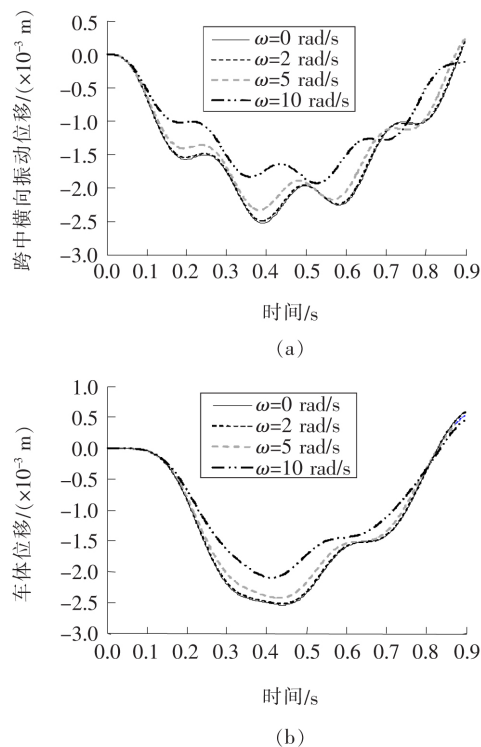


图6 转动角速度对系统的影响

Fig. 6 The influence of rotating speed on the system response

4 结论

作者对非惯性参考系中车—桥耦合非线性振动响应进行了分析计算,得到如下结论。

1) 在研究车—桥系统耦合振动响应过程中,由外部激励作用所引起的桥梁结构的运动与车—桥耦合振动系统中桥梁的变形运动存在着耦合关系,因此在对车—桥耦合振动系统分析时,应考虑外部激励对系统的影响。基于非惯性参考视角建模分析,有助于直观、准确地反映各物理量之间的联系。

2) 在外部强激励作用所引起的桥梁支座相对水平转动时,转动角速度对车—桥耦合系统刚度具有显著的影响,其中,系统轴向刚度随转动角速度的增大而减少,系统水平方向及横向刚度随转动角速度的增加而增大。由于梁体轴向固有刚度在数量级上远大于 ω_3^2 ,故对系统轴向振动影响较小,但对系统水平振动及横向振动影响明显。

3) 梁体结构轴向变形运动与水平方向变形运动相互耦合,横向变形运动与车辆振动位移相互耦合。因此随着角速度的增加,系统横向刚度不断增大,从而降低了梁体横向振动的位移幅值;当角速度继续增加到某一临界值时,横向振动会由于刚度的增加而出现动力刚化现象。此外,由于车体振动与梁体横向振动之间的耦合关系,车体振动位移也随转动角速度的增加而减弱。

〔参考文献〕

- [1] 杜宪亭,夏禾.地震空间变异性对车—桥系统响应的影响分析[J].工程力学,2012,29(9):106—111.
DU Xian—ting, XIA He. Influence of spatial variation of seismic ground motion on dynamic response of train—bridge system[J]. Engineering Mechanics, 2012, 29(9):106—111.
- [2] Jin Z, Pei S, Li X, et al. Effect of vertical ground motion on earthquake—induced derailment of railway vehicles over simply—supported bridges[J]. Journal of Sound and Vibration, 2016(383):277—294.
- [3] Zeng Q, Dimitrakopoulos E G. Derailment mechanism of trains running over bridges during strong earthquakes[J]. Procedia Engineering, 2017(199):2633—2638.
- [4] 李慧乐,夏禾,张楠,等.基于车—桥耦合动力分析的桥梁动应力计算方法[J].中国铁道科学,2015,36(1):68—74.
LI Hui—le, XIA He, ZHANG Nan, et al. Calculation method for dynamic stress of bridge based on vehicle—bridge coupled dynamic analysis[J]. China Railway Science, 2015, 36(1):68—74.
- [5] 夏禾,张楠,郭薇薇.车—桥耦合振动工程[M].北京:科学出版社,2014.
XIA He, ZHANG Nan, GUO Wei—wei. Coupling vibration of train—bridge system[M]. Beijing: Science Press, 2014.
- [6] 陈水生,李孟廷,桂水荣.多车激励公路简支梁车桥耦合振动响应分析[J].武汉理工大学学报,2014,36(3):101—106.
CHEN Shui—sheng, LI Meng—ting, GUI Shui—rong. Analysis on the vehicle—bridge coupling vibration for highway simple bridges due to moving multi—vehicle loading[J]. Journal of Wuhan University of Technology, 2014, 36(3):101—106.
- [7] Xu L, Zhai W. Stochastic analysis model for vehicle—track coupled systems subject to earthquakes and track random irregularities[J]. Journal of Sound Vibration, 2017(407):209—225.
- [8] Zhu Q, Xu Y L, Zhu L D, et al. Vortex—induced vibration analysis of long—span bridges with twin—box decks under non—uniformly distributed turbulent winds[J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 2018(172):31—41.
- [9] Zhang W, Cai C S, Pan F, et al. Fatigue life estimation of existing bridges under vehicle and non—stationary hurricane wind[J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 2014(133):135—145.
- [10] Chen N, Li Y, Wang B, et al. Effects of wind barrier on the safety of vehicles driven on bridges[J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 2015(143):113—127.
- [11] Do T V, Pham T M, Hao H. Dynamic responses and failure modes of bridge columns under vehicle collision[J]. Engineering Structures, 2018(156):243—259.
- [12] Tin V Do, Thong M Pharm, Hong Hao. Numerical investigation of the behavior of precast concrete segmental columns subjected to vehicle collision[J]. Engineering Structures, 2018(156):375—393.
- [13] 傅衣铭.结构非线性动力学分析[M].广州:暨南大学出版社,1997.
FU Yi—ming. Nonlinear dynamics analysis of structures[M]. Guangzhou: Jinan University Press, 1997.
- [14] Rao S S. Vibration of continuous systems[M]. Hoboken: Wiley, 2007.
- [15] Biggs John M. Introduction to structural dynamics[M]. New York: McGraw—Hill, 1964.